PISA-башня: попытка классификации PISA-math-задач от уровня к уровню

Ветошкина Е.С., Коломна, elena.vetoshkina@mail.ru

Хэкало С.П., Коломна, khekalo@mail.ru

Аннотация. На основе открытого банка заданий PISA исследования функциональной математической грамотности учащихся основной школы осуществлена попытка условной классификации PISA-math-задач (по уровням сложности) с обсуждением методических аспектов их решения.

Ключевые слова: классификация, уровни PISA-math-задач, функциональная математическая грамотность.

PISA-tower: classification of the PISA-math-tasks from level to level

E. Vetoshkina, S. Khekalo

Summary. An attempt to conditionally classify PISA-math problems (by difficulty levels) with a discussion of methodological aspects of solving them based on the open PISA task bank of the study of functional mathematical literacy of secondary school was implemented.

Keywords: functional mathematical literacy, levels of PISA-math problems, classification.

"Новые сапоги всегда жмут"

Козьма Прутков

В этом материале мы предлагаем вашему вниманию одну из возможных классификаций уровней сложности задач, представленных в открытых банках заданий PISA исследования функциональной математической грамотности учащихся основной школы (см, например, источники [1-6]). Мы осознаем условность этой классификации (другие виды классификаций можно найти, например, в [7]), в основу которой, согласно принципу функциональности (практической применимости в жизни), положен естественный принцип строительства "от фундамента к крыше - от уровня к уровню" (Таб. 1):

Таб. 1 - Схема классификации

Уровень задачи	**Характеристика уровня**
0	Ориентация на систему ЗУН и УУД: выразить одну переменную через другие в заданной формуле, произвести расчеты; отсутствие функциональной составляющей.
1	Ориентация на систему ЗУН и УУД: вспомнить необходимые простейшие формулы, произвести простейший перебор, произвести расчеты; отбросить лишние данные, простейшая функциональность.
2	Простые вычисления с данными в диапазоне; функциональная составляющая минимизации или максимизации значений параметров модели.
3	Простой (может показаться, что вероятностный) выбор предложенных ответов по типу "верно"-"неверно"; нетривиальное обоснование выбора, часто с использованием формул.
4	Обоснование приоритетности одних данных над другими на основе самостоятельно предложенной теоретической методики с применением расчетов и формул.
5	Выбор экспериментального инструментария для обоснования результата с применением "технологии рук"; расчет параметров по выбранной методике; исследование новых терминов и определения.

Приступим к детальному описанию классификации задач на конкретных примерах с комментариями и решениями.

ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО УРОВНЯ

В задачах нулевого уровня необходимо, сопоставив величины, посчитать одну величину через другую и, возможно, наоборот. Задачи этого типа фактически не требуют от учащихся функциональной математической грамотности, достаточно только универсальных учебных действий, приобретенных в школе [5].

Задача «Колодец под ключ»

Рис. 1 – Колодец

Текст задачи. Фирма «Коломна Септик» занимается установкой колодцев (Рис. 1) под ключ: копка ямы и укладка колец. Стоимость G (руб.) копки ямы для колодца рассчитывается по формуле

$$G = (1200 \cdot r + 1080) \cdot n,$$

где r - радиус ямы (м); n - количество стандартных (высота 90 см) железобетонных колец (шт.).

Общая стоимость K (руб.) укладки колец для колодца рассчитывается по формуле:

$$K = (3250 \cdot r + 2000) \cdot n.$$

Вопрос 1. Просчитайте стоимость установки колодца, который состоит из 13 стандартных железобетонных колец радиуса 1 м.

Комментарий 1. При ответе на вопрос можно поступить, исходя из арифметических соображений: подставить данные $r = 1$ (м) и $n = 13$ (шт.) в формулы для G и K, найти соответствующие значения и результаты сложить. Можно поступить и алгебраически: получить формулу для суммы $G + K$, а затем подставить числовые данные и найти результат.

Решение.

1 способ. Имеем

$$G = (1200 \cdot 1 + 1080) \cdot 13 = 29640 \text{ (руб.)},$$

$$K = (3250 \cdot 1 + 2000) \cdot 13 = 68250 \text{ (руб.)},$$

$$G + K = 29640 + 68250 = 97890 \text{ (руб.)}.$$

2 способ. Имеем

$$G + K = (1200 \cdot r + 1080) \cdot n + (3250 \cdot r + 2000) \cdot n = (4450 \cdot r + 3080) \cdot n,$$

$$G + K = (4450 \cdot 1 + 3080) \cdot 13 = 97890 \text{ (руб.)}.$$

Ответ. 97890 рублей.

Вопрос 2. За копку ямы для колодца в фирме «Коломна Септик» Евгения Ивановна заплатила 54000 руб. Какое количество стандартных железобетонных колец ей необходимо заказать у фирмы, если радиус ямы, которую ей выкопали, составляет 900 мм?

Комментарий 2. Для ответа на поставленный вопрос от учащихся требуется умение соотносить данные и вопрос с выбором формулы для расчета.

Решение. Имеем: $G = 54000$ (руб.) и $r = 900$ (мм). В тексте задачи указано, что радиус ямы измеряется в метрах, следовательно, необходимо перевести миллиметры в метры: $900\ \text{мм} = 90\ \text{см} = 0{,}9\ \text{м}$. Далее можно поступить двумя способами: подставить данные и выразить переменную или выразить переменную и подставить данные (желательно применить оба подхода):

$$54000 = (1200 \cdot 0{,}9 + 1080) \cdot \mathrm{n},$$

$$54000 = 2160 \cdot n, \ \ n = \frac{54000}{2160} = 25 \text{ (колец)}$$

или

$$n = \frac{G}{1200 \cdot r + 1080},$$

$$n = \frac{54000}{1200 \cdot 0{,}9 + 1080} = \frac{54000}{2160} = 25 \text{ (колец)}.$$

Ответ. 25 колец.

Задача «Капельница»

Текст задачи. Капельные вливания (Рис. 2) используются в медицине для введения больших объемов жидкости и лекарственных средств пациентам больницы. Для того, чтобы определить какое количество жидкости необходимо пациентам, медицинские сестры вычисляют скорость падения капель v (капель/мин.) по формуле

Рис. 2 – Капельные вливания

$$v = \frac{\mathrm{k} \cdot \mathrm{V}}{60 \cdot \mathrm{t}},$$

где k - число капель в объеме (капель/мл); t - количество часов, за которое необходимо сделать вливание (ч); V- объем вливания (мл).

Вопрос 1. Рассчитайте скорость падения капель, если пациенту необходима капельница на 3 часа, объемом 35 мл и с числом капель 20 капель/мл. Ответ округлите до десятых.

Комментарий 1. Для ответа на вопрос требуется подставить заданные величины в формулу.

Решение. Из текста вопроса имеем следующие начальные данные:

$$\mathrm{V} = 35\ (\text{мл}), \qquad \mathrm{k} = 20\ (\text{капель/мл}), \qquad t = 3\ (\text{ч}).$$

и

$$v_1 = \frac{20 \cdot 35}{60 \cdot 3} = \frac{35}{9} \approx 3{,}9\ (\text{капель/мин.}).$$

Ответ. 3,9 (капель/мин.).

Вопрос 2. Лечащий врач велел медицинской сестре увеличить пациенту часы вливания лекарственных средств в 2 раза, а объем вливания уменьшить на 5 мл. Рассчитайте новую скорость падения капель. В ответе укажите отношение скорости падения капель при первом назначении к скорости падения капель при втором. Ответ округлите до целых.

Комментарий 2. Для того, чтобы дать ответ на поставленный вопрос необходимо пересчитать исходные данные и подставить полученные значения в формулу.

Решение. Произведем пересчет исходных величин:

$$\mathrm{V} = 35 - 5 = 30\ (\text{мл}), \qquad \mathrm{k} = 20\ (\text{капель/мл}), \qquad t = 3 \cdot 2 = 6\ (\text{ч}).$$

и

$$v_2 = \frac{20 \cdot 30}{60 \cdot 6} = \frac{5}{3}\ (\text{капель/мин.}),$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{35}{9} : \frac{5}{3} = \frac{35 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{7}{3} \approx 2.$$

Ответ. 2.

ЗАДАЧИ ПЕРВОГО УРОВНЯ

В задачах первого уровня необходимо воспользоваться нетривиальной формулой по памяти или произвести ручной перебор всевозможных комбинаций (обычно небольшого количества). При этом в подобных задачах часть данных может оказаться лишними, т.е. необходимо не только проявить математическую грамотность, но и функциональную составляющую.

Задача «Кондитерская»

Рис. 3 - Бисквитный торт

Текст задачи. В кондитерской «Добрый торт» всегда можно приобрести на выбор два типа тортов (Рис.3): бисквитный за 375 руб. или муссовый за 455 руб. К любому из тортов на выбор идет одна из четырёх разных начинок: клубника, черника, малина и персик.

Вопрос 1. Сколько у Кати вариантов выбора различных комбинаций тортов с предлагаемыми дополнительными начинками?

Комментарий 1. Для ответа на вопрос требуется перебрать все возможные комбинации видов торта и начинки к нему.

Решение. Переберем возможные комбинации видов торта и начинки к нему: Бисквитный с клубникой; Бисквитный с черникой; Бисквитный с малиной; Бисквитный с персиками; Муссовый с клубникой; Муссовый с черникой; Муссовый с малиной; Муссовый с персиками.

Ответ. 8.

Комментарий 2. В пропедевтических целях для ответа на вопрос 1 задачи так же можно использовать правила алгебры событий:
элемент алгебры событий - выбрали бисквитный торт *и* одну из 4-х начинок к нему *или* выбрали муссовый торт *и* одну из 4-х начинок к нему;
перевод на язык алгебры чисел - $1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 8$.

Задача «В поисках сокровищ»

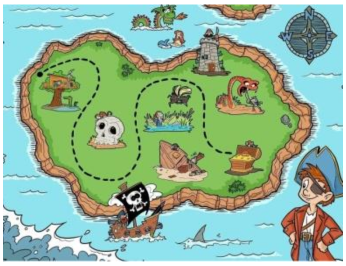

Рис. 4 – Карта сокровищ

Рис. 5 - Карта маршрута

Текст задачи. Лето в Подмосковье принимает неожиданный оборот для Саши и Маши, когда они находят дневник (Рис. 4), указывающий на давно потерянные сокровища. Для того, чтобы найти сокровища, им необходимо пройти поочередно три города и собрать 3 ключа для сундука, но для начала требуется ответить на вопросы, которые таит в себе дневник.

В дневнике сохранились лишь несколько записей, одна из них гласит: "Расстояние по прямой линии от Коломны до Луховиц и Каширы равно 24 км и 50 км соответственно. Соединяя на карте отрезками три города, получаем треугольник с прямым (приблизительно) углом в Коломне" (Рис. 5).

Вопрос 1. Чему равно расстояние от Луховиц до Каширы? Ответ округлите до целых.

Комментарий 1. Для решения данной задачи необходимо воспользоваться теоремой Пифагора.

Решение. Обозначим искомое расстояние через x, тогда

$$x^2 = 24^2 + 50^2 = 576 + 2500 = 3076 \text{ (км}^2\text{)}$$

$$x = \sqrt{3076} \approx 55 \text{ (км)}.$$

Ответ. 55 км.

Вопрос 2. Саша и Маша готовятся искать сокровища. Для этого им необходимо пройти маршрут Коломна-Луховицы-Кашира-Коломна. За какой промежуток времени (в часах), они посетят все города, если будут двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью 3 км/ч?

Справочные сведения. Формула для вычисления времени равномерного прямолинейного движения имеет вид

$$t = \frac{S}{v},$$

где S - пройденный путь, а v - скорость движения.

Комментарий 2. Для ответа на поставленный вопрос необходимо посчитать суммарный путь и воспользоваться представленной формулой.

Решение. Для того, чтобы найти суммарный путь, который необходимо пройти Саше и Маше, нужно посчитать периметр прямоугольного треугольника (Рис. 5):

$$S = 24 + 55 + 50 = 129(\text{км}).$$

Таким образом, время, которое ребята затратят на путешествие составит

$$t = \frac{129}{3} = 43\ (\text{ч}).$$

Ответ. 43 часа.

ЗАДАЧИ ВТОРОГО УРОВНЯ

Задачи этого уровня, как правило, носят описательный характер с различными характеристиками реального процесса или объекта в определенном диапазоне данных. Этим задачам так же свойственен процесс максимизации цепочки ответов за счет минимизации диапазона характеристик или одной из характеристик (или наоборот) - так себя проявляет функциональная компонента. Как правило, вычислительная составляющая такой задачи очень несложная.

Задача «Фигурный шоколад»

Рис. 6 - Золотые медали

Текст задачи. Шоколадная фабрика «Красный Октябрь» решила изготовить новый для них вид фигурного шоколада - шоколадные медали (Рис. 6). Все медали будут иметь круглую форму и золотую фольгу в виде обертки. Было принято решение сделать медали нескольких размеров.

Кондитеры произвели расчет и обнаружили, что идеальные шоколадные медали соответствуют следующим требованиям:

✓ готовое изделие должно быть не меньше 40 мм и не больше 101 мм в диаметре;

✓ каждая следующая шоколадная медаль в золотой обертке должна быть минимум на 20% больше в диаметре, чем предыдущая;

✓ фабрика может выпускать лишь те медали, диаметр которых равен натуральному числу.

Вопрос 1. Укажите максимальное количество размеров шоколадных медалей, которые соответствуют расчёту и исследованиям кондитеров.

Комментарий 1. В данном вопросе от учащегося требуется понимание сложной оценочной информации и ее использование для вычислений, а также знание нахождения процентов от числа.

Решение. Для того, чтобы посчитать максимальное количество всевозможных размеров шоколадных медалей, необходимо стартовать с медали минимально разрешенного диаметра и рассчитывать диаметр каждой следующей медали как диаметр предыдущей, увеличенной на 20%. При этом, если число, отвечающее за диаметр окажется не натуральным, его необходимо округлить вверх до ближайшего натурального числа, поскольку процент увеличения диаметра медали на каждом шаге должен быть не менее 20%.

При необходимости учащимся можно напомнить правило нахождения процентов от числа:

$$x\% \text{ от числа } y := \frac{x \cdot y}{100} = y\% \text{ от числа } x.$$

Последняя часть формулы бывает весьма полезной для быстроты вычислений (например, 18% от числа 50 = 50% от числа 18 =9).

Таким образом, складывается следующее решение задачи. За диаметр первой медали (в целях максимизации результата) необходимо принять $D_1 = 40$ (мм). Диаметр второй вычисляется следующим образом:

$$40 + 0{,}2 \cdot 40 = 40 + 8 = 48, \qquad 48 \in \mathbf{N} \text{ и } 48 \leq 101 \ \rightarrow \ D_2 = 48 \text{ (мм)}.$$

Диаметры следующих медалей:

$$48 + 0{,}2 \cdot 48 = 48 + 9{,}6 = 57{,}6; \quad 56{,}7 \leq 101 \ \rightarrow \ D_3 = 58 \text{ (мм)};$$

$$58 + 0{,}2 \cdot 58 = 58 + 11{,}6 = 69{,}6; \quad 69{,}6 \leq 101 \ \rightarrow \ D_4 = 70 \text{ (мм)};$$

$$70 + 0{,}2 \cdot 70 = 70 + 14 = 84; \quad 84 \leq 101 \ \rightarrow \ D_5 = 84 \text{ (мм)};$$

$$84 + 0{,}2 \cdot 84 = 84 + 16{,}8 = 100{,}8; \quad 100{,}8 \leq 101 \ \rightarrow \ D_6 = 101 \text{ (мм)}.$$

$D_6 = 101$ (мм) - максимально возможный диаметр шоколадной медали. Следовательно, процесс наращивания диаметра завершен.

Ответ. 6 штук.

ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ

Вычислительная составляющая этих задач очень несложная. В этой части такую задачу можно спутать с задачей нулевого уровня. Однако вопросы задачи с вариантами ответов "верно"-"неверно" требуют от обучающегося проявления его функциональной грамотности не в части догадок, а в части подбора формул и алгоритмов обоснования выбора ответа (построения и решения математической модели задачи).

Задача «Рост мальчиков»

Рис. 7 – Рост учащихся

Текст задачи. В 9 «А» классе Лицея № 22 им. Героя Советского Союза П.В. Стрельцова (г. Воскресенск) учатся 13 мальчиков. После измерения их роста (Рис. 7) в медицинском кабинете и необходимых вычислений было установлено, что средний рост мальчиков класса составляет 1,7 м.

Вопрос 1. Напишите «верно» или «неверно» для каждого нижеследующего утверждения:

1. Если в классе есть мальчик ростом 1,67 м, то в этом классе обязательно должен быть мальчик рост которого составляет 1,73 м.

2. Половина мальчиков в классе должны быть ниже 1,7 м, а другая половина выше 1,7 м.

3. Если выстроить мальчиков в шеренгу по росту, начиная с самого низкого и заканчивая самым высоким, то в центре должен стоять мальчик, рост которого строго 1,7 м.

4. У большинства мальчиков 9 «А» класса рост должен быть 1,7 м.

Комментарий 1. Ключевым моментом в ответе на вопрос задачи является понятие среднего роста. Учащийся должен понимать, что две последовательности с одинаковым количеством чисел могут иметь одинаковые средние значения, но сами последовательности в этом случае не обязаны совпадать. Так же дети должны осознавать, что последовательностей с заданными количеством элементов и средним значением бесконечно много.

Решения:

1. То, что в классе есть мальчик ростом 1,67 м при среднем росте 1,7 м гарантирует лишь то, что в классе обязательно должен быть мальчик с ростом более 1,7 м. Может быть и 1,73 м, но это не обязательно.

2. Это так же не обязательно, хотя бы потому, что мальчиков 13 - какие две половины?! Но, даже если мальчиков четное число (например, 10), то и это не обязательно - низкий рост (ниже среднего) шести мальчиков может быть компенсирован высоким ростом четырех.

3. Седьмой мальчик в группе из 13 человек конечно находится в центре шеренги, но его рост не обязан составлять среднее значение. Например, для группы из трех мальчиков с ростом: 1,4 м, 1,8 м и 1,9 м средний рост составит 1,7 м, а в центре - мальчик с ростом 1,8 м.

4. Как уже было сказано, среднее значение группы чисел не обязательно ее участник.

Ответ: неверно, неверно, неверно, неверно.

Задача «Подъёмная пассажирская канатная дорога»

Рис. 8 – Кресельный подъемник

Текст задачи. Подъемная пассажирская канатная дорога используется для подъема сноубордистов или лыжников к месту начала спуска. В Таб. 2 представлены характеристики кресельного подъемника на 2 места (Рис. 8).

Таб. 2 - Кресельный подъемник

Длина трассы, м	Время подъема до места начала спуска, мин	График работы подъемника, ч	Вместимость, чел.
800	20	07:00-16:00	2

Катаясь на горных лыжах, Дарина пользуется кресельным подъемником. Все кресла подъемника имеют номер от 01 до 20 (Рис. 9). Сноубордисты и лыжники начинают свою посадку от начала подъема и заканчивают на начале спуска. Кресла движутся по часовой стрелке. Дарина села в кресло номер 02 на место под номером 4 (Рис. 10) и начала свои наблюдения (начался отсчет времени).

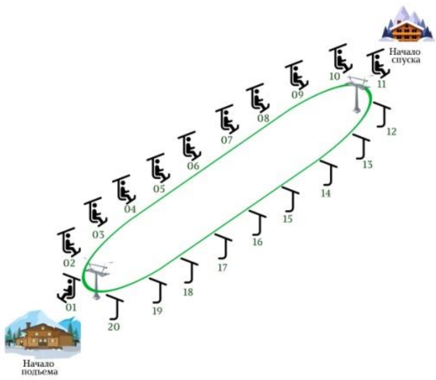

Рис. 9 - Схема трассы кресельного подъемника

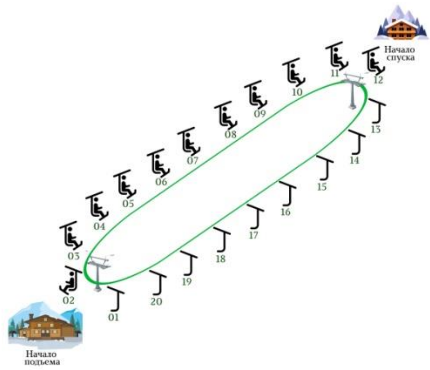

Рис. 10 - Начало движения Дарины на кресельном подъемнике

Вопрос 1. Напишите «верно» или «неверно» для каждого нижеследующего утверждения:

1. На Рис. 9 изображено расположение кресла номер 05 после 6-и минут движения от начала подъема этого кресла.

2. Расстояние между соседними креслами не превышает 50 м.

3. Если кресло номер 05 поднимется вверх по трассе на 240 м от положения на Рис. 10, то напротив него (на том же уровне) будет кресло под номером 13 (напротив кресла номер 05 на Рис. 10 находится кресло номер 19).

4. Спустя 10 минут после начала движения Дарины на кресельном подъемнике кресло номер 06 окажется напротив кресла номер 07.

Комментарий 1. Необходимо воспользоваться информацией, полученной на основании анализа Таб. 2, Рис. 9 и Рис. 10: определить местоположение начала подъема и начала спуска, начало отсчета времени, длину трассы, время подъема и т.д.

Решения:

1. 20 мин. подъема приходится на 10 интервалов между соседними креслами. Поэтому на один интервал приходится 2 мин. Кресло с номером 05 прошло 4 интервала, т.е. с начала движения прошло 8 мин.

2. На 10 интервалов между соседними креслами приходится вся длина трассы в 800 м. Следовательно, на один такой интервал приходится 80 м, что более 50 м.

3. Кресло под номером 05 прошло от своего положения (Рис. 10) 240 м, следовательно, оно сместилось вверх на три интервала между соседними креслами, "$05 + 3 = 08$", оказавшись в позиции 08 (Рис. 11). Напротив позиции 08 находится позиция 16, в которую перемещается вниз кресло номер 13 ("$16 - 3 = 13$").

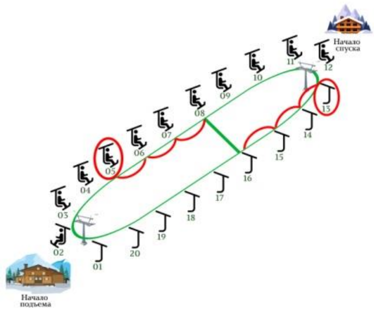

Рис. 11 - Движение кресла номер 05

4. Спустя 10 минут кресло номер 06 пройдет 5 интервалов движения, "$06 + 5 = 11$", т.е. окажется в позиции 11, напротив которой позиция 13. А в позицию 13 попадет кресло номер 08 ("$13 - 5 = 08$").

Ответ: неверно, неверно, верно, неверно.

ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО УРОВНЯ

Эти задачи характеризует наличие каких-то наборов величин (на первый взгляд, несвязанных), на основе которых необходимо представить математическое обоснование приоритетности выбора одного набора данных перед другим. Эти задачи, как правило, имеют помимо функциональной, еще и вычислительную сложность. Часто эти задачи сформулированы так, чтобы сбить обучающегося с верного «следа» решения.

Задача «Пиццерия»

Рис. 12 - Пицца

Текст задачи. Каждые выходные Александр с семьей посещает маленькие уютные пиццерии. В этот раз его выбор пал на пиццерию, в которой готовят по мотивам греческой и итальянской кухни. В «Дэдис Пицца» на выбор имеются две круглые пиццы (Рис. 12) одинаковой толщины, но разного диаметра. Итальянская пицца имеет диаметр 30 см и стоит 300 рублей за одну штуку. Греческая пицца дороже - 400 рублей за одну штуку, но и ее диаметр больше - 40 см.

Вопрос. Какую из пицц выгоднее купить Александру? Подробно аргументируйте свой ответ.

Комментарий. Учащимся необходимо отметить, что толщина пицц одинаковая, значит, это параметр на выгоду Александра не влияет. Диаметры пицц - разные, однако пиццы продают не разрезами (длинами), а кусочками (площадями). Таким образом, необходимо проследить взаимосвязь между площадями пицц и их соответствующими стоимостями. Покупка той пиццы выгодна, у которой стоимость 1 см^2 будет дешевле.

Решение. Для нахождения площадей S пицц воспользуемся формулой площади круга (выраженной через диаметр D)

$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Таким образом, площади итальянской и греческой пицц следующие:

$$S_{\text{ит.}} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 225\pi \ (\text{см}^2);$$

$$S_{\text{гр.}} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 400\pi \ (\text{см}^2).$$

Для выяснения стоимости 1 см^2 каждой из представленных пицц воспользуемся пропорциями:

Итальянская пицца

$$225\pi \ \text{см}^2 \quad \rightarrow \quad 300 \text{ руб.}$$
$$1 \ \text{см}^2 \quad \rightarrow \quad x \text{ руб.}$$
$$x = \frac{1 \cdot 300}{225\pi} = \frac{4}{3\pi} \ \text{ руб. за } 1 \ \text{см}^2$$

Греческая пицца

$$400\pi \ \text{см}^2 \quad \rightarrow \quad 400 \text{ руб.}$$
$$1 \ \text{см}^2 \quad \rightarrow \quad y \text{ руб.}$$
$$y = \frac{1}{\pi} \ \text{ руб. за } 1 \ \text{см}^2.$$

Поскольку

$$x - y = \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3\pi} > 0,$$

то $x > y$ и выгоднее приобрести греческую пиццу.

Ответ. Выгоднее купить греческую пиццу.

ЗАДАЧИ ПЯТОГО УРОВНЯ

В подобных задачах присутствуют завуалированные данные, которые нужно расшифровать для построения решения. Прямой вопрос задачи требует от обучающегося выбора экспериментального (не теоретического) инструментария. Каков этот инструментарий – не сразу ясно. Однако в этих задачах есть «подсказки», например, на объектах задачи можно рисовать, делать пометки и т.п. Основная сложность задачи пятого уровня состоит в том, что обучающийся, математическая грамотность которого не вызывает сомнения, может «споткнуться» на «защите» (обосновании) метода решения (исследования). Так же обучающегося «нервирует» приближение его ответа к истинному значению, поскольку уверенности в однозначном выборе инструментария, как уже говорилось, нет. В задачах такого уровня (по сути исследовательских) имеет значение не точность ответа (ответ, как правило, засчитывается при попадании в некоторый «широкий» интервал), а правильность обоснования метода решения.

Задача «Площади фигур»

Текст задачи. На Рис. 13 изображены различные фигуры в одинаковом масштабе изображения: капля, круг и звезда.

Рис. 13 – Фигуры

Вопрос. У какой из данных фигур набольшая площадь? Ответ обоснуйте. В ответе укажите номер такой фигуры.

Комментарий. Для ответа на поставленный вопрос учащимся понадобится либо линейка, циркуль и "фантазия" замерщика, либо ножницы. В целом, для решения подобных задач на тестирование PISA можно (и даже нужно) захватить угольник со шкалой, транспортир, циркуль.

Решение.

1 способ. Учитывая то, что в задаче необходимо выбрать фигуру наибольшей площади, гипотетически ("на глазок") предположим, что это круг (а площади капли и звезды гипотетически меньше). Далее замерим диаметр круга линейкой и примерно определим расположение центра и радиус. Начертим три окружности (Рис. 14) указанного радиуса с центрами: для круга - в центре круга; для капли и звезды - попробуем подобрать точки центров так, чтобы получаемые окружности примерно ограничивали каплю и звезду.

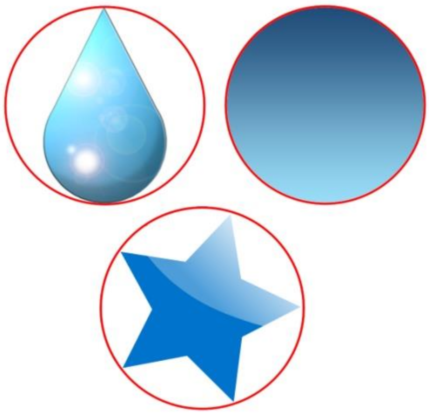

Рис. 14 – Ограниченность фигур

Таким образом, самой большей площадью обладает геометрическая фигура под номером 2 (краешки звезды вне окружности значительно меньше по площади белых частей внутри).

2 способ (альтернативный)**.** С помощью ножниц вырезаем фигуры по их границам. Накладываем одну фигуру на другую, а там где нужно, наоборот:

1. Наложили каплю на круг → $S_2 > S_1$;

2. Наложили круг на звезду → возможно звезда имеет большую площадь?! Наложили звезду на круг → $S_2 > S_3$;

3. $S_2 > S_1$ и $S_2 > S_3 \rightarrow \max_i S_i = S_2$.

Ответ. 2.

Задача «Площадь континента»

Текст задачи. Антарктида – это континент, который находится на юге Земного шара. Айсберги Антарктики самые красивые и большие на всей планете. Просторы данного континента первозданны и не тронуты человеком. На Рис. 15 изображена карта Антарктиды.

Рис. 15 – Карта Антарктиды

Вопрос. Определите площадь данного континента в км^2 (ответ округлите до миллионов км^2). Для этого воспользуйтесь масштабом карты на Рис. 15. Изложите ход своих мыслей и объясните, как получен результат. При необходимости можно делать пометки на самой карте.

Комментарий. Для ответа на поставленный вопрос учащимся необходимо уметь устанавливать связи между параметрами модели и интегрировать информацию. При ответе на вопрос учащимся понадобится либо линейка, либо циркуль и "фантазия" замерщика.

Решение.

1 способ (приближение площади континента площадью окружности)**.** Построим окружность на карте так, чтобы "излишне приобретенная площадь" примерно компенсировалась "утраченной", как это показано на Рис. 16.

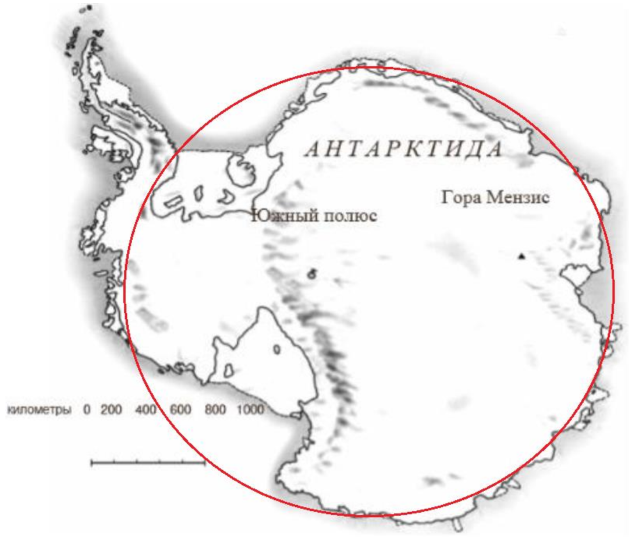

Рис. 16. - Круговое приближение

Диаметр этой окружности d(мм) по распечатке составит примерно $d = 63$ мм. В масштабе карты диаметр D (км) составит:

$$\begin{array}{lcr} 3\text{ мм} & \to & 200\text{ км} \\ d = 63\text{ мм} & \to & D, \end{array}$$

$$D = \frac{63 \cdot 200}{3} = 4200\ (\text{км}).$$

Таким образом, площадь континента составит

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{и} \quad S = \frac{\pi \cdot 4200^2}{4} \approx 13847400\ (\text{км}^2)\ \approx 14\ (\text{млн. км}^2).$$

2 способ (приближение площади континента площадями эллипса и прямоугольников)**.** Приблизим площадь фигурами так, как показано на Рис. 17.

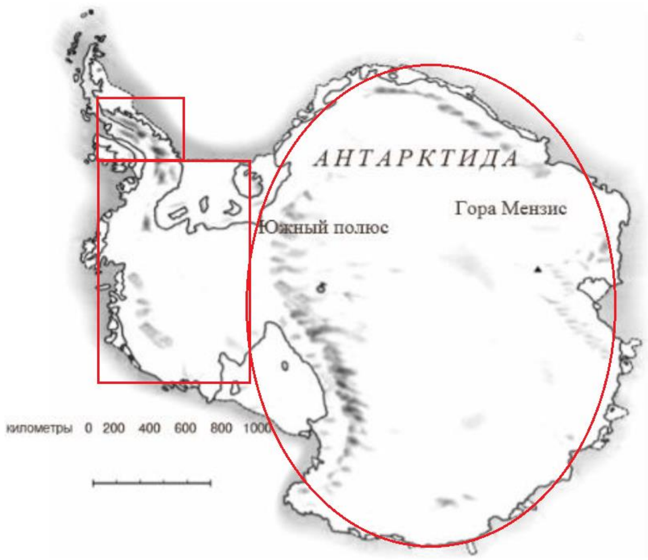

Рис. 17 - Приближение эллипсом и прямоугольниками

Это очень полезное приближение, открывающее учащемуся формулу площади эллипса

$$S = \frac{\pi D_1 D_2}{4},$$

где D_1 и D_2 - оси эллипса. В нашем случае

$$S = S_{\text{элл}} + S_{\text{Пр1}} + S_{\text{Пр2}},$$

$$a_1 = 8\ (\text{мм}), b_1 = 11\ (\text{мм});\ a_2 = 20\ (\text{мм}), b_2 = 29\ (\text{мм}) -$$

размеры прямоугольников и

$$d_1 = 48\ (\text{мм}), d_2 = 64\ (\text{мм}) -$$

оси эллипса.

Следовательно, с учетом коэффициента $k = \frac{200}{3}\left(\frac{\text{км}}{\text{мм}}\right)$, соответствующие реальные размеры составляют

$$A_1 = 533\ (\text{км}), B_1 = 733\ (\text{км});\ A_2 = 1333\ (\text{км}), B_2 = 1933\ (\text{км});$$

$$D_1 = 3200\ (\text{км}), D_2 = 4267\ (\text{км})$$

и

$$S = 533 \cdot 733 + 1333 \cdot 1933 + \frac{\pi \cdot 3200 \cdot 4267}{4}$$

$$= 13868082\ (\text{км}^2)\ \approx 14\ (\text{млн. км}^2).$$

3 способ (приближение площади континента сеткой интегрального разбиения)**.** Приблизим площадь разбиением так, как показано на Рис. 18. Диаметр измельчения $d = 1\ (\text{масш. ед.})$ выберем по размеру 1 масштабной единицы карты.

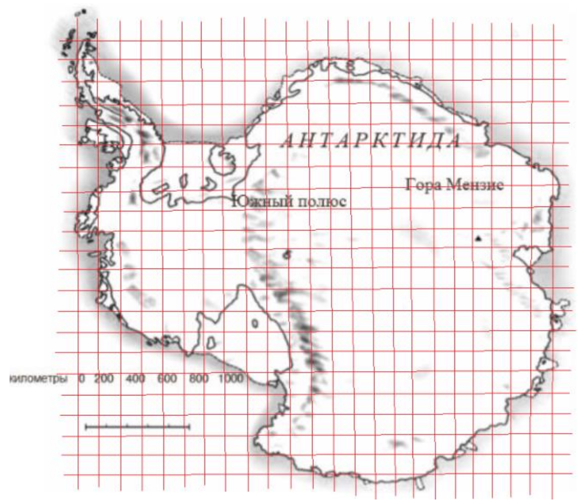

Рис. 18 - Измельчение площади

В результате масштабная площадь (число квадратиков, покрывающих карту континента) составит

$$s = 352\ (\text{масш. ед.}^2\ )$$

и

$$S = 352 \cdot 200^2 = 14080000\ (\text{км}^2)\ \approx 14\ (\text{млн. км}^2).$$

Ответ. 14 млн. км^2.

Замечание. Согласно данным [8] площадь Антарктиды составляет 14107000 км^2. Таким образом, абсолютные и относительные погрешности наших измерений оказались невелики (Таб. 3):

Таб. 3 - Погрешности измерений

Способ измерений	**1-ый способ**	**2-ой способ**	**3-ий способ**
Площадь S (км^2)	S_1 =13847400	S_2 =13868082	S_3 = 14080000
Абсолютная погрешность Δ (км^2)	$\Delta_1 = 259600$	$\Delta_2 = 238918$	$\Delta_3 = 27000$
Относительная погрешность ε (%)	$\varepsilon_1 = 1{,}8$	$\varepsilon_2 = 1{,}7$	$\varepsilon_3 = 0{,}2$

Как видим, экспериментально пришли к известному математическому факту: при уменьшении диаметра измельчений площади точность вычислений увеличивается (время на обработку, по-видимому, также увеличивается).

В заключение, отметим, что набор подобных уровневых задач можно найти, например, в [9].

Список литературы

1. https://rikc.by/ru/PISA/2-ex__pisa.pdf (дата обращения:10.09.2021).
2. http://center-imc.ru/wp-content/uploads/2020/02/10120.pdf (дата обращения: 10.09.2021).
3. https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf (дата обращения: 10.09.2021).
4. http://www.centeroko.ru (дата обращения – 10.09.2021).
5.http://gukolomna.ru/obrazovanie/funktsionalnaya-metmaticheskaya-gramotnost.php (дата обращения – 10.09.2021).
6. https://cppm.asou-mo.ru/index.php/proekty/funktsionalj-gramotnosti (дата обращения – 10.09.2021).

7. https://pisa50.imumk.ru/svc/images/page/4159/PISA-2021_02.pdf (дата обращения – 10.09.2021).
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/Антарктида (дата обращения – 10.09.2021).
9. Ветошкина Е.С. Хэкало С.П., Тесты на сформированность функциональной математической грамотности школьников на этапе завершения основной школы, Математика в школе, № ???, 2021