Муниципальное бюджетное образовательное учреждение лицей г. Лобня

**МЕТОДИЧЕСАЯ РАБОТА.**

**«РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Выполнила: учитель математики

Ярковая Валентина Николаевна

г. Лобня, 2019г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение……………………………………………………………………..…3

ГЛАВА I ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УЧАЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ

 §1. Психологические особенности подросткового возраста ………….6

 §2. Возрастные особенности учащихся 7-9 классов……………………11

ГЛАВА II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§1. Основные понятия темы «Системы алгебраических уравнений»………..18

§2. Равносильность систем уравнений…………………………………………22

§3. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений………27

ГЛАВА III МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СИСТЕМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Методические особенности обучения решению систем уравнений..34

§2. Анализ учебников по алгебре в рамках основной школы……………….49

Заключение………………………………………………………………………52

Список литературы…………………………………………………………...53

Приложения…………………………………………………………………...56

# Введение

#  Материал, связанный с системами нелинейных уравнений составляет значительную часть не только курса высшей алгебры, но и школьного курса математики. Это объясняется тем, что системы нелинейных уравнений широко используются в разных разделах математики, в решении различных прикладных задач. Основной задачей математики является построение математической модели, то есть перевод любой задачи на математический язык, в частности составление систем уравнений. Затем необходимо решить систему уравнений, и, наконец, результат необходимо перевести на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Раздел алгебры, связанный с решением систем алгебраических уравнений, считается одним из наиболее трудных разделов, так как нет единых способов решения систем алгебраических уравнений, особенно, если речь идет о нелинейных системах уравнений.

 Однако данный тип задач широко представлен как на Государственной итоговой аттестации по математике в 9 классе, и на ЕГЭ в 11 классе , так и на вступительных экзаменах в престижные ВУЗы. Анализ материалов вступительных экзаменов показывает, что такие задачи из года в год входят в состав самой трудной группы заданий ЕГЭ – часть С.

 В тоже время, изучив действующие учебники курса алгебры, можно констатировать тот факт, что решениям систем нелинейных уравнений уделяется недостаточно внимания. Отдельно эта тема рассматривается только в девятом и одиннадцатом классах.

 Начиная с седьмого класса, учащиеся решают системы уравнений. Но, к сожалению, нет четко выраженных приемов решения систем нелинейных уравнений.

 Поэтому **цель исследования** состоит в разработке, теоретическом обосновании, систематизации приемов решения систем нелинейных уравнений и их экспериментальной проверке.

 **Объектом исследования** является организация процесса обучения школьников решению задач курса алгебры.

 **Предметом исследования** является обучение способам решения систем нелинейных уравнений в курсе алгебры основной школы.

 **Выдвигаемая гипотеза** состоит в предположении о том, что овладение способами решения систем нелинейных алгебраических уравнений будет способствовать: достижению развивающих целей обучения, осознанности мышления, формированию учащимися системы знаний с опорой на их опыт.

**Задачи:**

1. Выделить способы решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
2. Составить наборы задач.
3. Разработать факультативные занятия и задания для самостоятельных работ.
4. Экспериментально проверить эффективность предложенных факультативных занятий.

 **Методы:**

1. Анализ учебников, научной литературы, учебных и методических пособий по математике.
2. Организация и проведение эксперимента с целью проверки гипотезы.

 **Практическая значимость исследования** заключается в том, что выделенные классы задач и способы их решения могут быть использованы учителями школ на уроках, а так же при совершенствовании программы и учебных пособий для средних школ.

**Положения, выносимые на защиту:**

* + 1. Решение систем уравнений дает возможность для учащихся, использовать системы уравнений, как метод решения наиболее общих и важных задач в рамках курса алгебры основной школы.
		2. Данные системы и способы их решения являются фундаментом для дальнейшего изучения алгебры, как в старших классах, так и в вузах.

 **Основные этапы работы:**

 **I этап:** анализ литературы по проблеме, разработка теоретических положений, постановка целей и задач исследования;

 **II этап**: Экспериментальная проверка овладения способами решения систем нелинейных алгебраических уравнений будет способствовать: достижению развивающих целей обучения, осознанности взаимодействия построение, разработка общей схемы исследования и модели эксперимента;

**III этап:** Анализ, обобщение полученных в ходе исследования результатов. Оформление дипломной работы. Дипломная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, приложения.

**ГЛАВА I. ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УЧАЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ**

 **§ 1. Психологические особенности подросткового возраста**

Хронологически подростковый возраст определяется от 10-11 до 14-15 лет. Современные психологи подростковый период делят на две стадии:

1 стадия – негативная – младший подростковый возраст ( 5-7 классы – 11-13 лет)

2 – стадия – позитивная – старший подростковый возраст ( 7-9 классы – 13-15 лет).

 Основной особенностью этого возраста являются резкие, качественные изменения, затрагивающие все стороны развития. Процесс анатомофизиологической перестройки является фоном, на котором протекает психологический кризис. Активизация и сложное взаимодействие гормонов роста и половых гормонов вызывают интенсивное физическое и физиологическое развитие. Увеличивается рост и вес подростка, причем у мальчиков в среднем пик «скачка роста» приходится на 13 лет, а заканчивается после 15 лет, иногда продолжаясь до 17 лет. У девочек «скачок роста» обычно начинается и кончается на два года раньше (дальнейший, более медленный рост может продолжаться еще несколько лет).

 Подростковый период – важный и трудный этап в жизни человека, время выборов, которое во многом определяют всю последующую жизнь. Характерное самосовершенствование для подростков в отличие от младших школьников, порождает у них активный поиск образца для подражания, который они находят среди старших по возрасту детей и взрослых людей одного с ними пола (стр.273 Немов)

 Подростковый возраст – остро протекающий переход от детства к взрослости, в котором переплетаются противоречивые тенденции. С одной стороны, для этого сложного периода показательны негативные проявления, дисгармоничность в строении личности, свертывание прежде установившейся системы интересов ребенка. С другой стороны, налицо протестующий характер его поведения по отношению к положительным факторам. Возрастает самостоятельность ребенка, более разнообразными становятся отношения с другими детьми и взрослыми, значительно расширяется сфера его деятельности. Главное – данный период отличается выходом ребенка на качественно новую социальную позицию, в которой формируется его сознательное отношение к себе как к члену общества.

 В подростковый период продолжает развиваться самосознание ребенка, оно становится направленным на осознание человеком своих личностных особенностей. Настроение подростков подвержено резким перепадам (переходы от безудержного веселья к депрессивной пассивности). Возрастает обидчивость, раздражительность, даже незначительное замечание нередко приводит к бурной реакции подростка. Возрастает самостоятельность ребенка, более разнообразными становятся отношения с другими детьми и взрослыми, значительно расширяется сфера его деятельности. Главное –данный период отличается выходом ребенка на качественно новую социальную позицию, в которой формируется его сознательное отношение к себе как к члену общества. Поведение подростка регулируется его самооценкой и формируется в ходе общения с окружающими людьми.   Общение со сверстниками носит информационный характер.

 Подросток обращает внимание на «Что? Где? Когда?», а не «Почему?» и «Зачем?». Подростковая дружба – сложное, часто противоречивое явление. Подросток стремится иметь близкого, верного друга и лихорадочно меняет друзей. Он ищет в друге сходства, понимания и принятия своих собственных переживаний и установок. Личностная нестабильность порождает противоречивые желания и поступки: подростки стремятся во всем походить на сверстников и пытаются выделиться в группе, хотят заслужить уважение и бравируют недостатками, требуют верности и меняют друзей. В  общение с взрослыми, подросток ждет от взрослых сотрудничества. Он ждет общение, включенное в деятельность, где бы он чувствовал себя на равных с взрослыми. Он не терпит приказов и указаний. Принимает советы только от референтных, то есть значимых для него взрослых. Если появляется смысловой барьер, это – конфликт. Инициатива разрешения конфликтной ситуации чаще принадлежит взрослому, потому что он ответственен за то, что происходит с подростком.

 В 14 лет начинается переходный период между подростковым и юношеским возрастом. В этот период (переходный период к ранней юности) у подростка притупляется острота восприятия сверстников. Больший интерес начинают вызывать взрослые, чей опыт, знания помогают ориентироваться в вопросах, связанных с будущей жизнью. Отношения подростков с окружающим миром спонтанны, неконструктивны, незрелы, некомпетентны. Подростки проявляют негативизм по отношению к взрослым (учителям), трагически переживают ситуации не включенности в группу сверстников (если все против меня - я против всех), надеются на неопределенное светлое будущее, бравируют своей независимостью, приверженностью материальным интересам, испытывают потребность в общении. Интенсивное развитие абстрактного мышления приводит к изменению способов мышления, его социализации. В результате изменяются взгляды на окружающую действительность и на самого себя. Поведение подростка становится для него той реальностью, в которой он начинает оценивать себя как то, что он есть на самом деле. Активное формирование самосознания и рефлексии рождает массу вопросов о жизни и о себе. Постоянное беспокойство “какой я?” вынуждает подростка искать резервы своих возможностей. Интерес к себе чрезвычайно высок. Происходит открытие своего внутреннего мира. Внутреннее “Я” перестает совпадать с “внешним”, что приводит к развитию самообладания и самоконтроля. Вместе с осознанием своей уникальности, неповторимости, непохожести на других подросток часто испытывает чувство одиночества. С одной стороны, растет потребность в общении, с другой - повышается его избирательность, появляется потребность в уединении. Подростки особенно чувствительны к особенностям своего тела и своей внешности, постоянно сопоставляют свое развитие с развитием сверстников. Специфическим для них является фиксация на реальных или воображаемых недостатках. Описывая себя, подросток часто употребляет выражения: “некрасивый”, “неумный”, “безвольный” и др.

 Подростковый возраст нередко рассматривается и как период конфликтов. Действительно, подростковый период труден для подростка, но труден он и для взрослых, причём трудности возникают именно в сфере их взаимоотношений. Подросток нередко оказывается в жёстких рамках, которые  ставят ему взрослые, в таких случаях у подростка возникает активное сопротивление требованиям, реакция протеста и т.д.

 Недооценка этого приводит взрослых к мысли о нарочитости, сознательном непослушании или даже злом умысле подростка. Положение же взрослых в их взаимоотношениях с подростками предпочтительнее уже потому, что у них есть важное преимущество – возможность выбора линии поведения по собственному усмотрению, чего у подростка обычно нет. Главное, что тяготит подростка в его взаимоотношениях с взрослыми, - это чувство внутренней несвободы, ограничение в деятельности.

 Ещё одной важной причиной сложностей подросткового периода является половое созревание и половая идентификация. Формирующееся половое влечение, как правило, порождает ряд трудных для подростка задач, и как следствие, усложняется общение. В присутствии сверстников противоположного пола подростки особенно чувствительны к бестактным, унижающим  достоинство их личности замечаниям окружающих.

 Школа и учение занимают большое место в жизни подростков, но не одинаковое у разных детей, несмотря на осознание всеми важности и необходимости учения. Для многих привлекательность школы возрастает из-за возможности широкого общения со сверстниками, но само учение от этого не редко страдает. Разнообразная и интересная информация, которая интенсивно поглощается подростком из разных источников, также конкурирует со знаниями, получаемыми в школе.

**§ 2. Возрастные особенности учащихся 7-9 классов**

 Учение для подростка является главным видом деятельности. В учебной деятельности подростка имеются свои трудности и противоречия, но есть и свои преимущества, на которые может и должен опираться педагог. Большим достоинством подростка является его готовность ко всем видам учебной деятельности, которые делают его взрослым в собственных глазах. Его привлекают самостоятельные формы организации занятий на уроке, сложный учебный материал, возможность самому строить свою познавательную деятельность за пределами школы. Однако подросток эту готовность не умеет реализовать, так как он не владеет способами выполнения новых форм учебной деятельности.

 Подросток эмоционально реагирует на новый учебный предмет, а у некоторых эта реакция исчезает довольно быстро. Нередко у них снижается и общий интерес к учению, к школе. Как показывает психологические исследования, основная причина заключена в несформированности у учащихся навыков учебной деятельности, что не дает возможности удовлетворить актуальную потребность возраста - потребность в самоутверждении.

 Одним из способов повышения эффективности обучения является целенаправленное формирование мотивов учения. Это непосредственно связано с удовлетворением преобладающих потребностей возраста. Одна из таких потребностей - познавательная. При ее удовлетворении у него формируется устойчивые познавательные интересы, которые определяют его положительное отношение к учебным предметам. Подростков очень привлекает возможность расширить, обогатить свои знания, проникнуть в сущность изучаемых явлений, установить причинно-следственные связи. Они испытывают большое эмоциональное удовлетворение от исследовательской деятельности. Неудовлетворение познавательной потребности и познавательных интересов вызывает не только состояние скуки, безразличия, но порой и резко отрицательное отношение к «неинтересным предметам». При этом в равной степени имеет значение, как содержание, так и процесс, способы, приемы овладения знаниями.
Интересы подростков различаются по направленности их познавательной деятельности. Одни учащиеся предпочитают описательный материал, их привлекают отдельные факты, другие стремятся разобраться в сущности изучаемых явлений, объяснить их с точки зрения теории, третьи проявляют большую активность при использовании знаний в практической деятельности, другие - к творческой, исследовательской деятельности.

 Страх перед неуспехом, боязнь поражения порой приводит подростков к поиску благовидных причин, чтобы не пойти в школу или уйти с урока. Эмоциональное благополучие подростка во многом зависит от оценки его учебной деятельности взрослыми. Нередко смысл оценки для подростка выступает в стремлении добиться успеха в учебном процессе и тем самым получить уверенность в своих способностях и возможностях. Это связано с такой доминирующей потребностью возраста, как потребность осознать, оценить себя как личность, свои сильные и слабые стороны. Как показывают исследования, именно в подростковом возрасте доминирующую роль играет самооценка. Для эмоционального благополучия подростка очень важно, чтобы оценка и самооценка совпадали. В противном случае возникает внутренний, а иногда и внешний конфликт. [20]

 Организация учебной деятельности подростков - важнейшая и сложнейшая задача. Ученик среднего школьного возраста вполне способен понять аргументацию педагога, родителя, согласиться с разумными доводами. Однако в виду особенностей мышления, характерных для данного возраста, подростка уже не удовлетворит процесс сообщения сведений в готовом, законченном виде. Ему захочется проверить их достоверность, убедиться в правильности суждений. Споры с учителями, родителями, приятелями - характерная черта данного возраста. Их важная роль заключается в том, что они позволяют обменяться мнениями по теме, проверить истинность своих воззрений и общепринятых взглядов, проявить себя. В частности, в обучении большой эффект дает внедрение проблемных задач. Основы данного подхода в обучении были разработаны еще в 60 - 70 - е годы XX века отечественными педагогами. В основе всех действий при проблемном подходе лежит осознание отсутствия знаний для решения конкретных задач, разрешение противоречий. В современных условиях данный подход должен реализовываться в контексте уровня достижений современной науки, задач социализации учащихся

 Важно поощрять самостоятельность мышления, высказывание школьником собственной точки зрения, умение сравнивать, находить общие и отличительные черты, выделять главное, устанавливать причинно- следственные связи, делать выводы. Для подростка большое значение будет иметь информация интересная, увлекательная, которая стимулирует его воображение, заставляет задуматься. Хороший эффект дает периодическая смена видов деятельности - не только на уроке, но и при подготовке домашних заданий. Разнообразие видов работы способно стать весьма результативным средством повышения внимания и важным способом предотвращения общей физической утомляемости, связанной, как и с учебной нагрузкой, так и с общим процессом кардинальной перестройки организма.

 В 7-9 классах некоторые подростки начинают систематически и целенаправленно заниматься самовоспитанием и саморазвитием. Ведущим видом деятельности является интимно-личностное общение. Оно пронизывает всю жизнь подростков, накладывая отпечаток и на учение, и на учебные занятия, и на отношения с родителями. Если потребность в полноценном общении со значимыми взрослыми и сверстниками не удовлетворяется, у детей появляются тяжелые переживания. В этих классах продолжается интеллектуализация познавательных процессов: внимания, памяти, воображения, мышления, речи. Потребность в самопознании в этом возрасте бывает настолько сильной, что нередко перевешивает отсутствие непосредственного интереса тестовым заданиям. При наличии такой потребности подростками будут нормально восприниматься даже сами по себе малоинтересные тесты, но только в том случае, если они дают возможность лучше узнать самих себя, сравнить себя с другими.

 В 7 классе происходит становление теоретического рефлексивного мышления на основе развития формально-логических операций. Подросток, абстрагируясь от конкретного, наглядного материала, рассуждает в чисто словесном плане. У семиклассника активное развитие получают чтение, монологическая и письменная речь. Письменная речь улучшается в направлении от способности к письменному изложению, до самостоятельного сочинения на заданную произвольную тему.

 Семиклассники все меньше общаются с взрослыми и все больше общаются со сверстниками. Круг общения подростка со сверстниками не ограничивается близкими друзьями, напротив он становится гораздо шире, чем в предыдущих возрастах. В 7 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – алгебру. В курсе 7 класса начинают изучать основные понятия: алгебраические выражения и их преобразования, одночлены и многочлены и действия с ними (включая формулы сокращенного умножения), уравнения и способы их решения, системы уравнений и способы их решения, функции и графики функций. В последующих классах они будут уточняться и дополняться, но основы закладываются именно в начале обучения в 7 классе.

 У восьмиклассника становление теоретического рефлексивного мышления тесно связано с развитием воображения, что дает импульс к творчеству: подростки начинают писать стихи, серьезно заниматься разными видами конструирования и т. п. Существует и вторая линия развития воображения: потребности, чувства, переполняющие подростка, выплескиваются в воображаемой ситуации. Неудовлетворенные в реальной жизни желания легко исполняются в мире фантазий: замкнутый подросток, которому трудно общаться со сверстниками, становится героем, и ему рукоплещет толпа. Игра воображения не только доставляет удовольствие, но и приносит успокоение. В своих фантазиях подросток лучше осознает собственные влечения и эмоции, впервые начинает представлять свой будущий жизненный путь. В 8 классе учащиеся учатся самостоятельно *обнаруживать* и *формулировать* проблему в классной и индивидуальной учебной деятельности;

– *выдвигать* версии решения проблемы, осознавать конечный результат, выбирать средства достижения цели из предложенных или их искать самостоятельно;

– *составлять* (индивидуально или в группе) план решения проблемы (выполнения проекта);

 – самостоятельно *осознавать* причины своего успеха или неуспеха и находить способы выхода из ситуации неуспеха;

– *уметь оценить* степень успешности своей индивидуальной образовательной деятельности.

 При переходе из 8-го в 9-тый класс у учащихся наблюдается скачок в овладении такими операциями, как классификация, аналогия, обобщение и др. устойчиво проявляется рефлексивный характер мышления: подростки анализируют операции, которые они производят, способы решения задач. Учащиеся получают начальные представления об организации статистических исследований. Они знакомятся с понятиями генеральной и выборочной совокупности. Приводятся примеры представления статистических данных в виде таблиц частот и относительных частот. Эти умения развиваются в процессе школьного обучения, при овладении знаковыми системами, принятыми в математике, физике и химии.

 В 9-том классе решается вопрос о дальнейшей жизни: что делать? – продолжить обучение в школе, пойти в училище или работать? По существу от старшего подростка общество требует профессионального самоопределения, хотя и первоначального. При этом он должен разобраться в собственных способностях и склонностях, иметь представление о будущей профессии и о конкретных способах достижения профессионального мастерства в избранной области. Это сама по себе сложная задача. Еще более она усложняется в наше время – переломный исторический период. Девятиклассникам не вполне ясно, что их ждет впереди, и это неопределенное будущее вызывает у них опасения, страхи и повышенный уровень тревожности. В 9-ом классе происходит овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования.Формирование умений точно, грамотно, аргументировано излагать мысли как в устной, так и в письменной форме, овладение методами поиска, систематизации, анализа, классификации информации из различных источников (включая учебную, справочную литературу, современные информационные технологии).

Происходит воспитание культуры личности, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для научно-технического прогресса.

 В 7-9 классах детей так тянет друг к другу, их общение настолько интенсивно, что говорят о типично подростковой «реакции группирования». Подросток может входить одновременно в несколько групп, допустим, в одну из групп класса, в компанию своего или соседнего двора и группу, сложившуюся на занятиях в спорткомплексе. Иногда значительное влияние на личность оказывают подростковые группы, образующиеся в летних лагерях. То, что получает от группы подросток и что он может дать ей, зависит от уровня развития группы, в которую он входит. Центральное место начинает занимать анализ содержания материала, его своеобразия и внутренней логики. Для одних подростков характерна гибкость в выборе путей заучивания, другие предпочитают какой-либо один способ, а некоторые стараются упорядочить и логически обработать любой материал. Умение логически обрабатывать материал часто развивается у подростков стихийно. От этого зависит не только успеваемость, глубина и прочность знаний, но и возможность дальнейшего развития интеллекта и способностей подростка.

 Еще одной из возрастных особенностей учащихся 7–9 классов заключается в том, что они находятся на завершающем этапе развития, перед началом самостоятельной жизни. Но личностная особенность этих групп школьников, в первую очередь, зависит от их правильного обучения и воспитания, что означает особенность социальной ситуации развития старших школьников. Среди школьников есть и будет много способных, одарённых, и талантливых, можно сказать и гениальных личностей. Для развития их способностей требуется особое внимание со стороны школы, учителей, родителей, общественности и особенно, государства.

**ГЛАВА II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**§1. Основные понятия темы «Системы алгебраических уравнений»**

Проанализировав математическую научно-популярную и учебную литературу, мы выделили несколько определений понятий, относящихся к теме «системы алгебраических уравнений».

Определения понятия «система уравнений»

1. Если одноименные неизвестные в нескольких уравнениях обозначают одну и ту же величину, то такая группа уравнений называется системой уравнений. [49]
2. Несколько уравнений с двумя переменными *x, y* образуют систему уравнений, если ставится задача об отыскании всех таких пар *(x; y)*, которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений. [31]
3. Если даны уравнения *f1(x,y)=0* и *f2(x,y)=0* и требуется найти общее решение этих уравнений, то такая пара уравнений называется системой двух уравнений с двумя переменными. [1]

Определения понятия «решение системы уравнений»

1. Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называется пара чисел, подстановка которых в каждое уравнение системы превращает каждое уравнение системы в тождество. [49]
2. Каждая такая пара (удовлетворяющая каждому уравнению) называется решением системы. [31]
3. Всякое общее решение уравнений называется решением системы. [1]

Что значит решить систему уравнений?

1. Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными – это значит найти все решения этой системы или же убедиться в отсутствии таковых. [49]
2. Решить систему уравнений – значит найти все ее решения. Множество решений системы может быть, в частности, пустым. [31]

Определения понятия «равносильные системы уравнений»

1. Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если всякое решение первой системы является решением второй и, наоборот, всякое решение второй системы представляет собой решение первой. [49]
2. Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают. [31]
3. Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными) в данном числовом множестве, если все решения первой являются решениями второй, и, наоборот, все решения второй являются решениями первой. [1]

Определения понятия «несовместная система уравнений»

1. Система, не имеющая решений, называется несовместной. [1]
2. Множество решений системы может быть, в частности, пустым – в этом случае говорят, что система не имеет решений или что эта система несовместна. [31]

Определение понятия «линейное уравнение»

Уравнение вида

…

где  - переменные, а коэффициенты  - заданные числа, называется линейным. [1]

Определения понятия «линейная система уравнений»

1. Всякая система двух уравнений с двумя неизвестными  и , которая может быть преобразована к виду



называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными. [49]

1. Если каждое из уравнений системы



является линейным, то система принимает вид



и называется линейной системой двух уравнений с двумя переменными. [1]

Определение понятия «нелинейная система уравнений»

Система уравнений



называется нелинейной, если хотя бы одно из ее уравнений является нелинейным. [1]

Определение понятия «однородный многочлен»

Однородным многочленом *n*-й степени относительно *x* и *y* называется такой многочлен, у которого сумма показателей степеней этих переменных в каждом члене равна *n*. [1]

Определения понятия «однородное уравнение»

1. Уравнение  называется однородным, если левая его часть – однородный многочлен относительно  и . [1]
2. Однородное уравнение – уравнение вида , где  - однородный многочлен. [31]

Определения понятия «однородная система уравнений»

1. Однородные уравнения образуют систему, которая называется однородной. [1]
2. Система двух уравнений с двумя переменными вида



называется однородной (левые части обоих уравнений – однородные многочлены степени *n* от двух переменных). [31]

Определение понятия «симметрическое выражение»

Выражение F*(x,y)* называется симметрическим, если оно при замене переменных *x* на *y*, *y* на *x* не изменится. [31]

Определения понятия «симметричная система»

1. Системы уравнений с двумя переменными *x* и *y*, не изменяющиеся при замене *x* на *y* и *y* на *x* называются симметричными. [1]
2. Система, все уравнения которой симметрические, называется симметрической. [31]

 **§2. Равносильность систем уравнений**

Решение системы уравнений состоит в последовательной замене данной системы другой системой. При этом следует избегать таких преобразований, в результате которых нарушается равносильность. В случае, если все же приходится выполнять преобразования, в результате которых либо появляются посторонние решения, либо происходит их потеря, необходимо исключать посторонние решения и восстанавливать потерянные.

 Рассмотрим основные преобразования, в результате которых равносильность не нарушается.

а) Любое из уравнений системы можно заменить равносильным ему уравнением, а оставшееся уравнение оставить без изменений.

Например, система



равносильна системе



а) Любое уравнение системы можно заменить уравнением, полученным сложением соответственных частей данных уравнений.

Так, например, система уравнений



равносильна системе



где *a ≠ 0, b ≠ 0* − произвольные действительные числа.

1. Если из одного уравнения системы



можно выразить переменную (например, *у*) однозначно через другую: *y=φ(х)*, то система



равносильна данной.

Последнее правило лежит в основе метода подстановки.

Докажем одно из перечисленных утверждений, например, утверждение, содержащееся в пункте с).

Пусть система (1) имеет вид: 

Пусть  − решение данной системы, тогда справедливы числовые равенства





Из (2) и (3) следует, что



а последнее равенство вместе с равенством (2) означает, что пара чисел  является решением системы



Пусть  − решение системы (1′), тогда имеют место числовые равенства (2) и (4), откуда следует равенство (3). Из равенств (2) и (3) заключаем, что  − решение системы (1).

1. Если одно из уравнений системы (1), например, первое, распадается на два уравнения *F1(x,y)F2(x,y)=0*, где *F1*и *F2*− многочлены от *х* и *у*, то система (1) равносильна совокупности следующих систем:



Последнее означает, что всякое решение системы (1) является решением, по крайней мере, одной из систем (5), (6) и всякое решение любой из систем (5), (6) является решением системы (1).

Если система (1) равносильна совокупности систем (5), (6), то можно вначале решить системы (5), (6), а затем объединить множества решений этих систем; это объединение и дает все решения системы (1).

Рассмотрим систему



Если каждое решение системы (7) есть решение системы



то система (8) называется следствием системы (7). Таким образом, среди решений системы (8), являющейся следствием системы (7), содержатся все решения системы (7). А те решения системы (8), которые не удовлетворяют системе (7), выявляются с помощью проверки (подстановки в систему (7)).

Сформулируем некоторые утверждения, связанные с понятием следствия (в записи систем опускаем переменные, чтобы яснее подчеркнуть основные характеристики рассматриваемых систем).

Итак, дана система: . Ее следствием являются системы:

   (если *f2 ≠ 0, g2 ≠ 0*)

Элементарными преобразованиями систем уравнений являются также следующие преобразования:

* Перестановка двух уравнений системы местами.
* Умножение обеих частей какого-либо уравнения на отличное от нуля число.
* Прибавление к обеим частям какого-либо уравнения системы, умноженного на скаляр.
* Система уравнений  заданная на множестве М, равносильна системе уравнений , где *g1(x,y), g2(x,y)* – функции, определенные на множестве М (множество М может совпадать с областью допустимых значений *х* и *у* системы).
* Системы уравнений  и , где *a* и *b* – любые действительные числа, равносильны.
* Система уравнений  заданная на множестве М, равносильна системе уравнений , где *g1(x,y), g2(x,y)* – функции, определенные на множестве М, причем *g1(x,y)≠0, g2(x,y)≠0* на множестве М.
* Системы уравнений  и , где *a≠0, b≠0* – произвольные действительные числа, равносильны.
* Системы уравнений  и , рассматриваемые на множестве допустимых значений *х* и *у*, равносильны при *p1(x,y)≠0, s1(x,y)≠0, p2(x,y)≠0, s2(x,y)≠0*.
* Системы уравнений  и , где *a≠0, b≠0* – произвольные действительные числа, равносильны.
* Системы уравнений  и , где *a≠0, b≠0* – произвольные действительные числа, равносильны.
* Системы уравнений и , где *a≠0, b≠0* – произвольные действительные числа, равносильны.
* Пусть функции *fi(x,y), φi(x,y)*, (*i*=1,2) неотрицательны на некотором множестве М. Тогда на этом множестве системы уравнений  и , где *n, k*N, равносильны.

При решении систем уравнений возможны два пути:

а) совершать только равносильные переходы. Тогда при каждом переходе множество решений будет сохраняться и в конечном итоге получатся все решения исходной системы;

б) совершать переходы к следствию исходной системы. Тогда множество решений может расшириться за счет появления посторонних решений, избавиться от которых можно путем проверки или подстановки полученных решений в ОДЗ с целью проверки выполнения условий ОДЗ.

**§3. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений**

Проанализировав работы известных математиков и математиков-методистов, мы пришли к выводу, что при решении систем алгебраических уравнений применяются различные методы.

В.Н. Литвиненко и А.Г. Мордкович предлагают следующие методы [31]: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод замены переменных, метод решения однородных систем, метод решения симметрических систем.

С.И. Туманов выделяет следующие методы [49]: метод подстановки, метод алгебраического сложения, графический метод.

**1. Метод подстановки.**

Решим систему



Выразим из второго уравнения *x*



Подставим это выражение в первое уравнение системы и перейдем к равносильной системе



С помощью тождественных преобразований получим



Решаем второе уравнение



Подставляя в первое уравнение системы, находим *x*:



Ответ: (4; 5), (-1/2; 1/2).

**2. Метод алгебраического сложения.**

Этот метод применяется для решения различных систем уравнений. Например:



Для решения данной системы необходимо сложить левые и правые части уравнений. В результате получим квадратное уравнение с одной переменной:



Выполняем тождественные преобразования и решаем уравнение





Подставляем в одно из уравнений системы *x1*, получим уравнение



Вычисляем корни этого уравнения:



Это дает нам два решения системы: (3; 2), (3; -3).

Аналогично подставляя *x2*, получим следующие два решения:

(-4; 2), (-4; -3).

Ответ: (3; 2), (3; -3), (-4; 2), (-4; -3).

**3. Графический метод решения систем уравнений**

Решим систему:



Подставим второе уравнение в первое и приведем подобные члены



Решение этого уравнения алгебраически вызывает значительные трудности. Поэтому решим поставленную задачу графическим методом. Заметим, что второе уравнение системы можно записать в виде:



Для построения графика этой функции составим таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -3 | -2 | -3/2 | -1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 | 3 | … |
| *y* | … | 64 | 9 | 25/16 | 0 | 9/16 | 1 | 9/16 | 0 | 25/16 | 9 | 64 | … |

По таблице строим график на миллиметровой бумаге. На этом же графике построим график функции



полученной из первого уравнения исходной системы. График этой функции будет проходить через точки (-3; 0) и (0; 3/2).



Как видно из графика, полученные две линии, одна из которых прямая, а другая кривая, пересекаются в двух точках (-1,4; 0,8) и (1,6; 2,3).

Ответ:  и 

**4. Системы, решаемые методом замены переменных.**

Замена в системе уравнений бывает следующего вида: либо замена производится в обоих уравнениях системы, либо только в одном.

Пример 1. Решим систему:



Рассмотрим первое уравнение. Пусть *(x+y)/(x-y)=z*. Тогда *(x-y)/(x+y)=1/z*. Первое уравнение примет вид



Домножим левую и правую части этого выражения на 2*z*, причем *z* не равняется нулю, и перенесем все в одну часть уравнения



Отсюда получается:



Исходная система представляется в виде совокупности двух систем



С помощью тождественных преобразований получим:



Из первой системы получаем решения () и (),

из второй: () и ().

Ответ: (), (), (), ().

Пример 2.



Производится замена 



Сводится к системе линейных уравнений и решается одним из методов, знакомых учащимся с 7 класса.

**5. Решение систем, содержащих однородное уравнение.**

Решим систему:



В данной системе однородным является первое уравнение. Заметим, что *y≠0.* Поэтому обе части первого уравнения можно разделить на *y*2.





Из этого уравнения получаем совокупность решений:



т.е.



Исходная система представляется в виде совокупности двух систем уравнений



Первая система не имеет решений, а вторая система имеет два решения: (2;3), (-2;-3).

Ответ: (2;3), (-2;-3).

**6. Решение симметрических систем.**

Пример:



Пусть



Выразим *x*3+*y*3 через *u* и *v*:



Исходная система сводится к следующей:



Отсюда находим *u* и *v*:



Возвращаемся к переменным *x* и *y*



Из этой совокупности получаем два решения: (1;2), (2;1).

Ответ: (1;2), (2;1).

ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

 **§1. Методические особенности обучения решению систем уравнений**

В современных условиях, в ходе процесса введения новых разделов в курс математики основной школы, все еще актуальным является основное содержание учебного курса. Раздел, посвященный решению систем уравнений, все еще сохраняет свое фундаментальное положение. В условиях современной основной школы, а также учитывая особенности изучения алгебры в рамках 7-9 класса, стоит рассматривать исследуемую проблему ввиду ее важности и обширности того материала, который она охватывает.

Решение систем уравнений дает возможность для учащихся, по сути, метод для решения наиболее общих и важных задач в рамках курса алгебры основной школы. Процесс решения уравнений, а также их систем позволяет объединить в едином поле наибольшее количество элементов математики, которые изучаются в рамках школьного курса. Кроме того, данные системы являются фундаментом для дальнейшего изучения алгебры.

 С учетом всех факторов, обеспечивающих методику обучения, в современной школе изучение математики организовано в методически-содержательную линию уравнений и неравенств. В данной содержательно-методической линии рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенств, методов их решения (как общих принципов, так и частных). Особое место занимает изучение особой взаимосвязи уравнений с неравенствами и с числовой, функциональной, а также другими линиями, которые изучаются в рамках курса алгебры основной школы.

 Помимо содержательно-методической линии школьного курса алгебры, которая в данном исследовании выступает основой, также стоит выделить и формально оперативную, вычислительную, логическую, алгоритмическую. Комплекс всех данных линий применительно к решению систем уравнений в частности, и изучения алгебры в целом, дает возможность выработать у учащихся комплексную систему знаний, умений и навыков, которыми должны овладеть школьники в процессе обучения в основной школе.

 Методика обучения решению систем уравнений в рамках основной школы должна быть, продиктована, в первую очередь, с учетом возрастных особенностей школьников, обучающихся в 7-9 классах. Кроме того, теоретическое обобщение процесса решения систем уравнений является фундаментом для более сложного материала, который изучается в старшей школе, и в дальнейшем может вести к малой эффективности процесса обучения.

 Важно отметить, что областям возникновения и функционирования понятия уравнения в курсе алгебры основной школы, в целом, должны соответствовать несколько основных направлений по методике обучения решения уравнений и неравенств.

 В первую очередь, прикладная направленность линий различных уравнений и неравенств (а также систем неравенств) должны раскрываться главным образом при применении алгебраического метода решения задач, представленных в текстовом виде. Данный метод достаточно широко применяется в рамках курса алгебры основной школы. Это связано с тем, что данный метод прямо связан с приемами, которые используются в приложениях математики. Во многом, прикладное значение уравнений и систем уравнений в процессе изучения математики заключается в том, что они являются своеобразной основой тех математических средств, которые используются в математическом моделировании. Математическое моделирование, в свою очередь, на современном этапе занимает одно из ведущих мест в приложениях математики.

При методике обучения решению систем уравнений стоит учитывать тип уравнения. Так, ниже представлены различные способы решения системы линейного уравнения с двумя переменными:

 

 Данное уравнение изучается в рамках школьного курса 7 класса и овладение методикой решения подобных уравнений является обязательным умением для ученика.

 Первое уравнение можно представить в качестве линейной функции:

 

при условии, что



 Второе линейное уравнение  можно преобразовать в линейную функцию, также при условии, что .

В данных примерах линейных уравнений графиками обоих уравнений будут выступать прямые линии.

 Можно трансформировать данную систему уравнений, преобразовав ее в подобный вид.

 

 Множеством решений, как первого, так и второго уравнения является множество точек, лежащих на соответствующей им прямой. Две прямые способны пересекаться – и точка их пересечения, будет являться единственным решением системы (показатели x и y).

 Данная система уравнений может решаться несколькими путями. Так, первым из них является способ подстановки.

 Так, можно рассмотреть способ подстановки на примере системы уравнений

 

 Так, для решения подобного уравнения необходимо выразить во втором уравнении х и подставить полученное значение в первое уравнение:

 а затем 

 Путем математических вычислений данную систему линейных уравнений можно свести к данному виду:

 

 Путем подстановки найденного значение y во второе уравнение, находим значение переменной х. Это выражается в данной форме

 

 Метод подстановки при решении систем линейных уравнений является одним из наиболее распространенных. Это обусловлено его достаточной простотой и легкостью обучения в процессе взаимодействия между учителем и учеником.

 Во время обучения решению систем уравнений учителю необходимо придерживаться следующих этапов чтобы в полной мере обеспечить квалифицированное обучение.

* Помочь ученикам определить (по виду уравнения) каким методом решения наиболее целесообразно воспользоваться: алгебраическим, графическим, методом интервалов;
* Подвести учеников к вспоминаю данного метода решения и оценить возможность его применения к конкретной систему уравнений;
* Определить возможные затруднения, которые могут возникнуть при решении данной системы уравнений;
* Выявить и оценить необходимость комбинации различных методов решения систем уравнений;
* Составить план решения в целом.

В данном контексте необходимо вернуться к различным методам решения систем линейных уравнений, следующей из которых является метод алгебраического сложения.

Например, 

Из данного уравнения находим х, который равняется 2.

Далее необходимо вычесть из первого уравнения системы второе

 

 В результате проделанных действий, мы получим решение системы. В данном случае решением системы будет точка с координатами (2;1).

 В силу того, что в современной школьной программе 7-9 классов встречаются наиболее разнообразные системы уравнений, необходимо более подробно рассмотреть различные методики обучения их решения.

 Так, достаточно широко в учебной программе рассматриваются системы уравнений с одним решением. Особенностью их решения является то, что возможно применение различных методов, а также их комбинация. Более подробно можно их разобрать на следующем примере.

 

 При решении данной системы уравнений лучше всего выбрать способ алгебраического сложения, который предполагает вычитание первого уравнения системы из второго. В итоге данного вычитания получаем

 2у = 60

что, в свою очередь, позволяет найти значение у

 

 Подставим значение у во второе уравнение и найдем х, который в данном случае будет равняться 60.

 Помимо этого, возможны системы, в которых отсутствуют переменные с одинаковыми коэффициентами, в связи с этим ученику будет необходимо уравнять их самостоятельно.

 Так, система уравнений может быть преобразована в подобный вид: 

в следствии дальнейших вычислений система уравнений будет приведена к следующей форме:

 

Затем ученику необходимо выполнить сложение уравнений

 

В результате дальнейших математических вычислений, приведенных к форме простого линейного уравнения, ученик должен получить правильный ответ, который в данном случае равняется (- 3; -2).

 Отдельно необходимо отметить специфику методики обучения решению систем уравнений, которые имеют бесконечное множество решений или не имеют их вовсе.

 На примере системы уравнений необходимо продемонстрировать ученикам методику решения уравнений, которые потенциально могут не иметь решения.

Так, одним из путей является разделение второго уравнения на 2:

 

Далее происходит вычитание из первого уравнения второго, что сводится к 0 = 2.5, что демонстрирует, что полученное выражение и не зависит от переменных х и у, которые вписаны в систему. Следовательно, и данная система уравнений не имеет решения. Дополнительно, это можно доказать при помощи построения графика, который бы демонстрировал отсутствие решения в данной системе уравнений.

 В то же время необходимо отметить, что основные методы решений линейных уравнений достаточно широко используются в процессе обучения в рамках основной школы.

 Особое место в методике обучения решению систем уравнений занимает та теоретико-математическая направленность уравнений и систем уравнений, которая раскрывается в нескольких аспектах. Прежде всего, это связано с изучением наиболее важных классов уравнений и систем уравнений, неравенств и их систем. Во-вторых, в методике обучения решению уравнений и их систем особое место также занимает изучение обобщенных понятий и методов, которые относятся к данной теоретико-методической линии. Оба данных аспекта достаточно широко представлены в школьном курсе математики. В современных условиях основные классы и линии уравнений и систем уравнений связаны с наиболее основными и важными математическими моделями. Методика обучения изучения уравнений и систем уравнений в рамках школьного курса дает возможность в полной мере использовать обобщенные понятия и методы, связанные с системами уравнений, что в свою очередь позволяет упорядочить изучение всей теоретико-математической линии в целом. Использование и применение как обобщенных понятий, относящихся к системе уравнений, так и отдельных методов, позволяет в полной мере упорядочить в логическом ключе те методические линии, которые описывают общее в процедурах, методах и приемах решения. Опираясь на весьма основные понятия, относящиеся к логике, такие как: равенство, неизвестное, логическое следование, равносильность, общие математические методы и понятия дают возможность проанализировать основные линии, которые должны быть раскрыты в уравнении и в системе уравнений.

 В то же время необходимо отметить, что на современном этапе, в рамках школьного курса существуют значительные упущения, которые осложняют процесс обучения решению систем уравнений. В то же время, в последние годы наблюдается тенденция к повышению уровня теоретизации, и как следствие, теоретического обобщения. Это, в свою очередь, привело к тому, что многие методы и приемы решения систем уравнения получили достаточно четкое определение и однозначные трактовки, которые значительно упростили изучение необходимого школьного материала.

 В современных школах все еще активно наблюдается использование частных приемов решения систем уравнения. С учетом отсутствия единой обобщающей теории, которая могла бы гарантировать некую унификацию процесса обучения решению систем уравнений, современные школьники наталкиваются на определенные сложности в процессе обучения. Достаточно широко распространены различные математические ошибки, которые проистекают из того, что приемы, характерные для решения систем одного типа могут механически переноситься на системы уравнений другого типа. На данном этапе, школьные учителя фактически самостоятельно вовлекаются в процесс унификации методов и приемов обучения решению систем уравнений, что обусловлено отсутствием обобщающей теорий. Это, в свою очередь, может приводить к возникновению процесса, который характеризируется включением в систему изучения методических фрагментов зачастую неверных или ошибочных, которые усложняют процесс обучения для школьника.

 Помимо этого, необходимо и отдельно разобрать специфические особенности методики обучения решению систем нелинейных уравнений.

 Так, системы нелинейных уравнений решаются преимущественно теми же методами, что и системы линейных уравнений, а именно как методом алгебраического сложения, методом исключения переменных, методом введения новых переменных, разложение на множители или же применением системы однородных уравнений.

 На примере данной системы уравнений можно рассмотреть применения метода разложения на множители.

 

В связи с тем, что данную систему уравнений можно свести к виду

 

следовательно, система нелинейных уравнений сводится к виду

 

что в дальнейшем можно выразить в более стройной и логичной конструкции: 

 Из данной системы уравнений можно сделать вывод о том, что x + y + 1 ≠ 0, поскольку если бы это было так, то правая часть второго уравнения так же равнялась бы нулю. Следовательно, данная система уравнений равна следующей системе:

 

Представив х в качестве выражения 2у – 1, можно решить второе уравнение, в следствии чего можно найти значение переменной у, которая в данном случае равняется: у1= 1; у2 = - 2/3

 При помощи выражение х из первого уравнения, с методом одновременного подставки его во второе уравнение системы, можно найти значение х, которое в итоге составляет х1 = 1; х2 = - 7/3.

 Метод разложение на множители достаточно активно используется учителями в процессе обучения школьников в рамках основной программы. Это обусловлено достаточной простотой данного метода для понимания школьниками, а также дает возможность в процессе решения систем уравнений опираться на ранее полученные знания.

 Также достаточно широко в рамках школьной программы используется метод алгебраических преобразований уравнений системы. Поскольку одной из уравнений системы вполне можно умножать, вычитать, складывать, делить. В таком случае следствие системы будет иметь те же свойства, что и сама система: будь то отсутствие решений, их бесчисленное множество или конкретные значения. В то же время необходимо отметить, что при рассмотрении решения систем уравнений методом алгебраических преобразований, стоит учитывать, что если решением системы уравнений будет алгебраическое выражение, то его следует подставить в исходную систему и рассматривать совместно. Таким образом будет возможно рассмотрение равносильной системы или же совокупности равносильных систем (при усложнении условий решения).

 Так, систему уравнений

 

стоит рассматривать с учетом того, что в данном примере x + 2y ≠ 0, следовательно:

  затем данную систему уравнений можно трансформировать в

 

 Для решения систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований каждого уравнения, необходимо рассмотреть этот пример как совокупность равносильных систем:

 из которой следует и 

Таким образом решением данной системы уравнений являются следующие значения: {(1; 1), (-1,8; -0,6)}.

 Также при решении систем нелинейных уравнений возможно использование метода исключения одной из неизвестных. Он позволяет сводить решение системы уравнений к такому, в котором будет уже на одно неизвестное меньше. Данный метод позволяет ученикам в полной мере применить полученные ранее знания, и не допустить типичных ошибок в процессе решения систем уравнений, которые зачастую предлагаются в рамках программы основной школы.

 Так, применение метода исключения одной из неизвестных можно проследить на данном примере:

 

 Поскольку левые части уравнений содержат одни и те же комбинации неизвестных, то можно умножить уравнения на подходящие множители, в результате чего будет возможно исключение одного из неизветсных, представленных в системе. Для этого умножим первое уравнение на -3 и сложим со вторым уравнением. Результатом будет уравнение данного вида.

 

 Данное уравнение, в свою очередь, решается уже методом замены.

Пусть xy = t, тогда , t2 - 11t + 18= 0, откуда t1 = 2; t2 = 9

Данный шаг приводит к тому, что исходная система может быть разложена на две системы:

 

 В результате дальнейших математических вычислений становится возможным найти решение, которое сводится к {(1;2),(-1;-2)}.

 Применение метода исключения одной из неизвестных дает возможность учителю в процессе обучения решению систем уравнений применять знания учеников из различных сфер алгебраической науки, а также демонстрирует способность учеников усваивать альтернативные способы решения математических примеров.

 Еще одним методом, который можно использовать в процессе обучения решению систем уравнений, является метод замены переменных. Его следует разобрать на данном примере системы уравнений:

 

Данное уравнение можно трансформировать в такую форму

 

Производится замена: пусть , тогда 

Складывания оба уравнения системы, мы получим

 

Далее необходимо решить данное уравнение с учетом всего изученного материала.

что преобразовывается в 

 Далее возможно упрощение системы уравнений, что в итоге можн о выразить в форме:



Решением данной системы уравнений будут являться значение {(1;1)}.

 Стоит отметить, что методика обучению решения систем уравнений в курсе алгебры охватывает множество этапов. Начальный заключается как в введении основных понятий, введению основных теорем о равносильности, рассмотрению различных типов уравнений, и как следствие, различных систем уравнений. Данный начальный этап зачастую обусловлен базированием на теоретических или логических рассмотрениях, которые были усвоены учениками в процессе обучения до основной школы. В современных условиях существуют разработки, направленные на внедрение в рамки основной школы наиболее педагогически эффективной методики обучения решению систем уравнений, которая в то же время будет в полной степени соответствовать корректным математическим знаниям.

 Согласно требованиям государственной подготовки, к моменту выпуски из школы, ученики должны уметь решать линейные, квадратные и рациональные уравнения, а также системы двух линейных уравнений. Таким образом, можно говорить о том, что методика обучения решению систем уравнений служит и для того, чтобы в рамках существующей традиции разделения систем на две группы: без параметров и с параметрами, в правильной плоскости классифицировать представленные системы уравнений.

 Важно отметить, что обучение решению систем уравнений невозможно без комплексного подхода к процессу решению простейших уравнений и неравенств. На современном этапе большинство преподавателей выделяют несколько этапов подготовки учеников в рамках основной школы по содержательно-методологической линии «уравнения и неравенства»:

* Прежде всего, ученик должен уметь решать простейшие примеры уравнений и неравенств. Без этого невозможен процесс обучения решению систем уравнений.
* Умение решать уравнения, путем их приведения к простейшим формам, а также нахождения как тождественных преобразований, так и приведению подобных;
* Умение решать простейшие уравнения с параметрами. Данный этап дает возможность сформировать в процессе обучения у ученика навыков к самостоятельному решению уравнений, а также заложит основу для дальнейшего углубления знаний.

Кроме того, необходимо отметить, что согласно официальным программам, ученик по окончанию основной школы должен обладать достаточными навыками, знаниями и умениями, чтобы быть в состоянии решить уравнение, аналогичное представленному.



Методика обучения решению систем уравнений в рамках курса алгебры основной школы заключается в том, что учитель должен научить школьника возможным путем решения данного примера, основываясь на различных математических методах. В данном случае, когда речь идет о нелинейном алгебраическом уравнении, возможны несколько методов решения данного уравнения. Прежде всего, речь о методе подстановки, графическом методе и методе замене переменных, а также методе алгебраического сложения.

 Исходя из существования различных типов уравнений и их систем, и процесса их усложнения в рамках школьной программе, особое внимание необходимо уделить линейным уравнениям с одним или несколькими неизвестными, а также системам линейных уравнений с двумя неизвестными. Другие же типы – иррациональные, трансцендентные уравнения рассматриваются уже не в рамках основной школы, и во многом основываются на тех, знаниях, которые были получены учеником ранее.

 В данном контексте особое значение приобретает последовательность и методика обучения решению систем уравнений. Несмотря на то, что на современном этапе существуют различия в подходах к последовательности и методике изучения и решения уравнений и их систем, в целом, они различаются не значительно. Это обусловлено тем, что в изучении различных типов уравнений существует определенная логическая последовательность, обусловленная уровнем сложности уравнений, а также той теоретической базой и навыками, которые необходимы для решения уравнений и их систем.

 Прежде всего, необходимо прояснить термин методики обучения решению систем уравнений. Так, традиционно методика преподавания математики рассматривается в качестве дидактических приемов и средств, которые служат для обучения школьников. В связи с этими активно применяются методы, под которыми следует понимать способы взаимодействия между учителем и учеником. В то время необходимо отметить, что методы никогда не применяется отдельно друг от друга, хоть и существует достаточно стройная и их раздельная классификация. Зачастую в процессе обучения решению систем уравнений в курсе алгебры учителя обращаются к следующим методам: объяснительно-разъяснительные, при помощи которых усваивается теоретическая база, которая в последствии закрепляется решением разнообразных задач (репродуктивный метод). Данные методы не относятся к математическим методам, а лишь демонстрируют основные принципы методики преподавания.

 Кроме того, стоит отметить, что методы обучения нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Процесс выбора учителем методов обучения является достаточно творческим и базируется на достаточном уровне знакомства с теорией обучения, и владения математическим материалом. В современных условиях это осложнено растущей дистанцией между математикой, которая преподается в школе, и математикой научной.

**§2. Анализ учебников по алгебре в рамках основной школы**

В современных условиях, школьная программа по алгебре в рамках обучения в 7-9 классах ставит своей целью развитие математических способностей ученика. Знания и умения, необходимые ученику, должны формироваться под контролем и с помощью квалифицированного педагога, с учетом всех возрастных особенностей ученика, а также с применением различных обучающих методик. Значительное место в процессе изучения алгебры в целом и обучения решению систем уравнений в частности, занимают различные учебники и учебные пособия, которые используются в процессе школьного обучения. В процессе работы были проанализированы учебники: Мордковича А.Г. и др. издательство Мнемозина, 2010г., Алимов Ш.А. и др. издательство Просвещение, 2011г., Макарычев Ю.Н. и др. издательство Просвещение, 2014г., Никольский С.М. и др. издательство Просвещение, 2014г. (Приложение №1)

Так, одним из наиболее распространенных в настоящее время учебников является издания коллектива авторов, под руководством А. Г. Мордковича, охватывающее изучение алгебры в 7, 8 и 9 классах, то есть в рамках основной школы. Данные учебники в 2011 прошли контроль со стороны профильного министерства и были включены в Федеральный перечень учебников, содержание которых соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Основой практически всех учебников, допущенных для использования педагогами в школе является системно-деятельностный подход в методологии обучения, который предполагает активное включение ученика в процесс обучения. Это обуславливается использование проблемного и исследовательского метода в обучении школьников.

Целью изучения алгебры в рамках основной школы является:

* Овладение системой математических знаний и умений, которые необходимы для решения практических заданий по математике, а также для дальнейшего обучения;
* Развитие логического мышления, отдельных элементов алгебраической культуры;
* Формирование отношения к математике как к части общечеловеческого достояния.

Говоря отдельно об обучении решению систем уравнений, необходимо отметить, что все учебники, которые используется в рамках школьной программы, содержат в своей структуре все необходимые элементы, которые должны способствовать формированию у учеников следующих знаний и умений:

* Понимание определение «система уравнений»;
* Способность самостоятельно определять тип системы уравнений;
* Исходя из типа системы уравнений выбирать наиболее оптимальный способ решения данной системы;
* В полной мере овладеть разными способами и методами решения систем уравнений в курсе алгебры основной школы.

Важно отметить, что тематический цикл «системы уравнений» занимают в каждом классе основной школы не основную часть, а являются лишь одной из изучаемых тем. Вследствие постоянного усложнения изучаемого материала материал относительно систем уравнений подается постепенно: так, от решения простейших систем уравнений в 7 классе, ученик со временем должен овладеть умениями, достаточными для решения нелинейной системы уравнений с двумя переменными, которая предлагается в 9 классе.

Данный подход в полной мере дает возможность учителю ориентироваться на уже существующий уровень знаний учеников и их возрастные особенности. Данная норма представлена в программе, утвержденной министерством образования, и достаточно четко отражается в школьных учебниках.

В то же время, практика учителей часто отходить от учебника, предлагая те варианты и способы решения систем уравнений, которые учителя считают наиболее целесообразными, приводят к формированию у части учеников искаженных представлений о системе уравнений, и в дальнейшем может приводить к различным ошибкам процессе решения систем уравнений. Среди наиболее распространенных ошибок, которые допускают ученики во время решения систем уравнений в рамках курса алгебры основной школы, стоит отметить следующие:

* Упрощение левой и правой части системы уравнений в отдельности, что приводит к изменению как области допустимых значений, так и к итоговому значению неизвестных;
* Ошибки в тождественных преобразованиях выражений в одной части системы уравнений;
* Неправильный знак после извлечения квадратного корня из обеих частей выражения в системе уравнений;

Данные ошибки, так же как и другие, могут быть обусловлены как тем, что учитель в недостаточной степени объяснил теоретический материал, так и тем, что ученики могли забыть материал, который изучался ранее и логически предшествовал изучению нового типа систем уравнений. В связи с этим необходимо отметить особую важность актуализации знаний (повторения). Именно с данного элемента должно начинаться изучение каждого нового тематического блока как в алгебре, так и в рамках других школьных предметов.

**Заключение**

 Анализ практики преподавания математики показывает, что в знаниях большинства учащихся средних школ имеется существенный недостаток: непрочная связь общего с конкретным, неумение в полной мере распорядиться знаниями при рассмотрении основных фактов изучения курса алгебры. Главной причиной этого является недостаточное внимание к формированию обобщенных знаний об алгебраических уравнениях и неравенствах. Формирование обобщенных знаний является целью и средством обучения, воспитания и развития учащихся. К обобщенным умениям относятся умения основанные на понимании научных основ и структуры деятельности, самостоятельном определении рациональной последовательности выполнения операций из которых они слагаются.

 Необходимо помочь школьникам преодолеть трудности при решении алгебраических систем нелинейных уравнений, научить отыскивать наиболее рациональный способ решения систем уравнений, тем самым подготовить выпускника основной и средней школы к сдаче экзамена по математике, обеспечить высокие результаты на выпускных и вступительных экзаменах и дать возможность продолжить образование в вузе, где дисциплины математического цикла являются профильными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. / [А.Г.Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 11-е изд. Стер. М.: Мнемозина, 2009.
2. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. / [А.Г.Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. – 11-е изд. Стер. М.: Мнемозина, 2009.
3. Алимов Ш.А. и др. Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 255 с.
4. Бабаева Н.С. Приближенные методы решения уравнений // Информатика и образование. – 2003. – № 6.
5. Бекаревич А.Б. Уравнения в школьном курсе математики. – М., 1968. – 196 с.
6. Болгов В.А., Демидович Б.П., Еримов А.В. и др. Линейная алгебра и основы математического анализа… – 3-е изд. – М.: Альянс, 2014. – 480с.
7. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1974. – 592с.
8. Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
9. Вавилов В.В., Мелиников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. – М.: Наука. 1988. – 432с.
10. Виленкин Н.Я., Гутер Р.С., Земляков А.Н., Никольская И.Л. факультативный курс. Избранные воросы математики 7-8 класс. Под ред. В.В. Фирсова. – М.: Просвещение, 1978. – 192с.
11. Галицкий М.Л., Гольдман Л.И., Звавич. Сборник задач по алгебре 12-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 301с.
12. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 106 с.
13. Глейзер Г.И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1986. – 351с.
14. Кипнис И.М. Задачи на составление уравнений и неравенств: Пос. для учит-й. - М.: Просвещение, 1980 г. – 68 с.
15. Каченовский М.И., Колягин Ю.М., Оганесян В.А. под редакцией Яковлева Г.Н. Алгебра и начала анализа.- М.: Наука, 1978. – 336с.
16. Кожарин А.Ф., Лебедев В.К., Давыдова И.Л. Алгебра и геометрия. Методика и практика преподавания. Анализ программ, тематическое и календарное планирование, дидактические материалы, контрольные задания. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. – 352 с.
17. Колягин Ю.М. Методика преподавания математике в средней школе. Частные методики. – М.: Просвещение, 1977.
18. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика. Алгебра и элементарные функции, под. ред. Г.Н. Яковлева – М.: Агар, 1999г – 426с.
19. Лапушкина Л.И., Шабунин М.И. Системы алгебраических уравнений //Математика в школе. – 1998. – № 6. – с. 22-26.
20. Макарычев Ю.Н. Миндюк Н.Г., Нешков К.И, С.Б. Суворов; Под ред. С.А. Теляковского. Алгебра 7 класс учеб. для учащихся
21. Маркушевич Л.А., Черкасов Р.С. Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры средней школы // Математика в школе. – 1994. – №1.
22. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К. , Сорокин Ю.И. Математика в понятиях, определениях и терминах. Под ред. Л.В. Сабина., - М.: Просвещение, 1978. – 320с.
23. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под ред. Н.Л.Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
24. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика. – М.: Просвещение, 1987. – С. 104-130.
25. Мордкович А.Г. Алгебра 7 класс. В 2 ч. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович – 15-я изд., стер.– М.: Мнемозина, 2011. – 160 с.
26. Никольская И.Л., Фирсов В.В. Методика факультативных занятий в 7-8 классах. – М.: Просвещение, 1981.- 160с.
27. Никольский С. М. Потапов М. К. Решетников Н. Н. Шевкин А. В. Алгебра учеб. для 8 кл.общеобразоват. учреждений – 3изд. – М.: Просвещение, 2006г-287с.
28. Новосельцева З.И. Развернутые планы лекций и учебные задания для студентов по курсу "Теоретические основы обучения математике"/ С.-Петербург, Изд-во "Образование", РГПУ, 1997.
29. Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
30. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. - М.: МГУ, 1991 г.
31. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе / Минск, Изд-во "Высшая школа", 1990.
32. Петраков И.С. Математические кружки. Под ред. С.И. Шварцбурда - М.: Просвещение, 1987. – 224с.
33. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей. \_ М.: Просвещение, 1982. – 96с.
34. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе / Москва, Изд-во "Просвещение", 1985.
35. Шахместер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами. – 1-е изд.– СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004.– 304с.
36. Шварцбурд С.И., Ишаев-Мусатов О.С. Алгебра и начала анализа. – М.: «Высшая школа», 1981. – 160с.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

**Сравнительный анализ учебников алгебры 7-9 классов по решению нелинейных систем разными методами**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Учебники** | **Графический****метод решения****систем** | **Метод****подстановки** | **Метод****сложения** | **Метод****замены переменных** | **Метод****решения однородных****систем** | **Метод решения симметрических систем** |
| **1.**Мордковича А.Г. и др.Мнемозина, 2010 | №5.18- №5.21, №5.24, №5.35 Д. К. р.№3, №8 | Рассматривается№ 6.1 -№ 6.5 Д. К. р. № 4 | Рассматривается№ 6.6 - №6.8 Д. К. р. №5 | №6.9 №6.10 Д. К. р. №6 | нерассматривается |  |
| **2.**Алимов Ш.А. и др. Просвещение2011 |  | № 25, 26,27 | № 28-35, №57 | есть несколько заданий решить систему, на этот метод конкретных задание нет | нерассматривается |  |
| **3.**Макарычев Ю.Н. и др.Просвещение2014 | №416 – 423№439, №440 | №429, №430 | №448 | нерассматривается | №508, №515, №527-533, №536 |
| **4.**Никольский С.М. и др.Просвещение 2014 | №566, №584, №837, №839 | №538, №542, №543 - №547 | №548, №551 | нерассматривается |  |

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

**План-конспект урока в 9 «В» классе по теме:**

**«Решение системы уравнений с двумя переменными».**

 В целях усовершенствования методики обучения решению систем уравнений в курсе алгебры основной школы, ниже предложен план-конспект урока в 9 «В» классе по теме: «Решение системы уравнений с двумя переменными» ГБОУ «Школа №760 имени А. П. Маресьева»..

 Урок рассчитан на 9 класс общеобразовательной школы в соответствии с учебником Ю. Н. Макарычева, который рекомендован к использованию Министерством образования.

 Значение урока:

* Предполагается использование технологии модульного обучения для того, чтобы в полной мере реализовать личностно ориентированный подход в обучении ученика;
* Данная форма урока дает возможность включить каждого ученика в полноценную работу и сформировать у школьников навыки самообучения.

В результате изучение учебного материала в рамках программы, предлагаемой на уроке, школьник должен уметь:

* Решать системы уравнений с двумя переменными с применением различных методов (по заданному учителем алгоритму);
* Применять полученные знания самостоятельно. Самостоятельно определять наиболее целесообразный способ для решения конкретной системы уравнений.

Цели урока:

* Отработка методов решения систем уравнений различными способами (в первую очередь способом подстановки);
* Продемонстрировать ученикам такие способы решения систем уравнений как способ введения новой переменной, способ сложения;
* Формирование у учеников умений самообучения и самоконтроля;
* Включение каждого ученика в учебную деятельность.

Структура урока:

1. Актуализация знаний
2. Постановка цели урока
3. Входной контроль
4. Изучение нового материала
5. Разбор конкретных примеров заданий
6. Итоговый контроль
7. Рефлексия
8. Домашнее задание

**Содержание урока:**

Актуализация знаний

1. Выборочная проверка домашнего задания
2. Выборочный (фронтальный) опрос класса. Актуализация ранее изученного материала
* Что такое система уравнений?
* Что значит решить систему уравнений?
* Какие способы решения системы уравнений Вам известны?
* Каким образом решают систему уравнений способом подстановки?

Сообщение темы и цели урока: целью урока является изучение различных способов решения системы уравнений.

Изучение нового материала: в рамках урока необходимо рассмотреть различные способы решения систем уравнений.

Первый учебный элемент касается рассмотрения применения способа сложения при решении систем уравнений.

Так, можно рассмотреть этот способ на примере данной системы:

 

В процессе почленного сложения данных уравнений, выходит выражение .

В процессе замены одного из уравнений, получаем систему, которая имеет следующий вид:

 

Исходя из чего 

При подставлении найденных значений, получаем выражение

 

В ход решения данного уравнения находим значение 

Кроме того, также в процессе подставки получаем значение 

Учебный элемент № 2 заключается в обучении решению систем уравнений при помощи способа введения новой переменной.

Это можно проследить на примере данной системы уравнений:

 

Необходимо ввести новые переменные 

Таким образом, становится возможным сведение достаточно сложной системы к более простой

 

Что в дальнейшем преобразовывается в

 

Решение системы уравнений в отношении новых переменной дает возможность вернуться к ее решению в первоначальной форме:

 

Решение данной системы уравнений становится возможным в следствии применения способа подстановки. В результате мы получаем

 

 

Таким образом, решением данной системы являются следующие значения (5; -2).

Итоговый контроль

Учитель должен оценить степень усвоения нового материала. Для этого возможно предоставления ученикам нескольких вариантов заданий для проверки уровня полученных знаний.

Вариант 1

Решить данную систему уравнений, выбрав наиболее подходящий способ (способ подстановки)

 

Вариант 2

Решить данную систему уравнений, выбрав наиболее подходящий способ (способ введения новой переменной величины)

 

Рефлексия: учитель проверяет выполнение заданий, а также выставляет оценки. Данный этап дает возможность учителю проследить кто усвоил материал, а кому из учеников необходима дополнительная консультация по изучаемому материалу.

Домашнее задание:

Изучение параграфа 23 в учебнике (Ю. Н. Макарычев) и выполнение заданий № 17, 18 после параграфа.

Данная структура урока наиболее полно способствует обучению школьников и формированию у них необходимых знаний и умений, которые служат общему изучению алгебры. Ученикам предлагается несколько способов решения систем уравнений, что способствует росту их самостоятельности.

Также в рамках плана урока возможно составления приложения, в рамках которого будут решены те системы уравнений, которые предлагаются ученикам в качестве материала для проверки усвоенных знаний.

В целом, методика обучения решению систем уравнений в курсе алгебры основной школы заключается в устремлении учителя в полной мере обучить ученика не только основным вехам теоретического решения систем решений, но и закрепить данные способы на конкретных примерах.