Модель подготовки учащихся к ГИА-9 по планиметрии

Практика преподавания в школе показывает, что наиболее трудными для усвоения в школьном курсе математики являются такие разделы как тригонометрия, геометрия и текстовые задачи. И это понятно: решение заданий из данных разделов требует серьезной логической подготовки и сформированность различных групп УУД.

Тем не менее, результаты учащихся на диагностических работах в 9-11 классах, ГИА-9 и ГИА-11 можно улучшить за счет правильно выстроенного обобщающего повторения по конкретному разделу. После прохождения системного курса по одному из федеральных УМК важно осуществить повторение материала с учетом специфики заданий итоговой аттестации.

Ранее мы рассматривали методические рекомендации по различным темам школьного курса математики и разделам ГИА-9 и ГИА-11. С данными рекомендациями можно ознакомиться в ежегодных аналитических отчетах РЦОИ, которые есть в каждой образовательной организации. Так, в 2010 и 2012 годах были рассмотрены вопросы подготовки учащихся к решению заданий части В на ЕГЭ, в 2013 году - задачи прикладного характера, дробно-рациональные неравенства и базовые задания по стереометрии, в 2014 году – арифметика, задачи физического содержания, задания на график производной, сложные неравенства, задачи по геометрии, базовые задания по тригонометрии, в 2015 году – тригонометрические уравнения группы С на ЕГЭ.

В данной статье рассмотрим методические рекомендации по обобщающему повторению планиметрии в 9 классах. Это не случайно. В 2015 году проблема решения планиметрических заданий была значительно актуализирована внедрением известного на ОГЭ правила 3+2+2. Многие участники экзамена не сдали его исключительно потому, что не смогли набрать двух баллов по геометрии.

В рамках обобщающего повторения в 9 классе необходимо:

- кратко повторить основные справочные сведения (теоремы, свойства и признаки фигур);
- провести небольшой практикум по решению задач по формулам;
- провести практикум по решению задач на применение свойств фигур.

Рассмотрим примерное содержание каждого из трех «разделов».

1. Основные теоремы

Повторить (без доказательств, конечно) следующий материал.

Свойства параллельных прямых.

Признаки параллельности прямых.

Теоремы о существовании и единственности перпендикуляра к прямой.

Связь между параллельностью и перпендикулярностью.

Свойство вертикальных углов.

Свойство углов равнобедренного треугольника.

Теорема о сумме углов в треугольнике.

Теорема о сумме углов в выпуклом n-угольнике.
Теорема о внешнем угле треугольника.
Теорема о величине вписанного в окружность угла.
Признаки равенства треугольников.
Признаки равенства прямоугольных треугольников.
Свойство медианы равнобедренного треугольника.
Свойство средней линии треугольника.
Теорема синусов.
Теорема косинусов.
Теорема Пифагора.
Теорема Фалеса.
Теорема о пропорциональных отрезках.
Свойство биссектрисы треугольника.
Признаки подобия треугольников.
Соотношение длин наклонной и перпендикуляра.
Неравенство треугольника.
Связь между величинами сторон и величинами углов в треугольнике.
Местоположение центра окружности, описанной около треугольника.
Местоположение центра окружности, вписанной в треугольник.
Свойства параллелограмма.
Признаки параллелограмма.
Свойства прямоугольника.
Признак прямоугольника.
Свойства ромба.
Признак ромба.
Свойства квадрата.
Признак квадрата.
Свойство средней линии трапеции.
Критерии вписанного и описанного четырехугольников.
Свойство хорд и секущих.
Число π.
Теорема о разложении вектора по базису.
Теорема о скалярном произведении векторов.

2. Использование формул планиметрии и тригонометрии

Решение наибольшего числа задач по планиметрии предполагает знание формул планиметрии и тригонометрии. Это, прежде всего, задачи на решение треугольников, нахождение различных линейных элементов в геометрических фигурах (длин медиан, биссектрис, радиусов окружностей и т.д.), определение углов.

В дальнейшем около номера каждой задачи в скобках будут стоять цифры 1 и 2. Цифра 1 означает, что данная задача рекомендуется для подготовки к первой части ГИА или диагностической работы, цифра 2 –

задание повышенной сложности, для второй части. Задачи под литерой (2) идут в порядке возрастания сложности.

2а. Задачи на треугольник

При решении вычислительных задач на треугольник нужно знать следующие формулы:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R};$$

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{4S};\ r=\frac{S}{p};$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;\ \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R;$$

$m_a=\dfrac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$; $l_a=\dfrac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$, где a, b, c - стороны треугольника, α, β, γ - противолежащие им углы, r и R- радиусы вписанной и описанной окружностей, h_a, m_a, l_a - высота, медиана и биссектриса, проведенные к стороне a, S - площадь треугольника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника.

Иногда применяют формулу $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$, а также формулу расстояния между центрами описанной и вписанной окружностей: $d=\sqrt{R^2-2rR}$.

Здесь и далее мы представляем один из возможных наборов задач, при решении которых применяются разные формулы. При этом на протяжении всей статьи упор мы будем делать на задания второй части. Это и понятно. Задания первой части хорошо представлены в школьных учебниках, да и статистика у них на ГИА-9 неплохая. Для подготовки учащихся к первой части рекомендуем использовать ресурсы Открытого банка http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/7.

1. (1) Определите вид треугольника (остроугольный, тупоугольный или прямоугольный) со сторонами 8, 6 и 11 см.

Ответ: тупоугольный.

2. (1) Основание треугольника равно 6 см, один из углов при основании равен 105°, другой - 45°. Найдите длину стороны, лежащей против угла в 45°.

Ответ: $6\sqrt{2}$ см.

3. (1) Найдите площадь треугольника со сторонами 2, $\sqrt{5}$ и 3.

Ответ: $\sqrt{5}$.

4. (2) В треугольнике ABC, где $\angle$ACB=120°, проведена медиана CM. Найдите ее длину, если AC = 6, BC = 4.

Ответ: $\sqrt{7}$.

5. (2) Найдите длины сторон AB и AC остроугольного треугольника ABC, если BC = 8, а длины высот, опущенных на стороны AC и BC, равны 6,4 и 4 соответственно.

Ответ: AB=$\sqrt{41}$; AC=5.

6. (2) В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2-\dfrac{\pi}{2}}}$.

7. (2) Длины сторон a, b, c треугольника ABC равны 2, 3 и 4. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

8. (2) В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\dfrac{\pi}{3}$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5 см. Найти длины сторон треугольника ABC.

Ответ: $\mathrm{AB}=(6\sqrt{2}+1)$ см, $\mathrm{BC}=5\sqrt{3}$ см, $\mathrm{AC}=2$ см.

9. (2) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ длина стороны AB равна длине стороны A_1B_1, длина стороны AC равна длине стороны A_1C_1, величина угла BAC равна 60° и величина угла $B_1A_1C_1$ равна 120°. Известно, что отношение длины B_1C_1 к длине BC равно $\sqrt{n}$ (где n – целое число). Найти отношение длины AB к длине AC. При каких значениях n задача имеет хотя бы одно решение?

Ответ: отношение длины AB к длине AC равно $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ при n=2; равно 1 при n=3; при остальных n решений нет.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В треугольнике ABC высота AD на 4 см меньше стороны BC. Сторона AC равна 5 см. Найдите периметр треугольника ABC, если его площадь равна 16 см^2.

2. (2) Докажите, что для любого треугольника выполняется равенство: $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$, где h_a, h_b и h_c - высоты треугольника, а r – радиус вписанной окружности.

3. (2) Основание треугольника равно $\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основанию и делящей площадь треугольника пополам.

4. (2) Найдите площадь треугольника по стороне а и прилежащим к ней углам α и β.

5. (2) В треугольнике *ABC* длина высоты *BD* равна 6 см, длина медианы *CE* равна 5 см, расстояние от точки пересечения отрезков *BD* и *CE* до стороны *AC* равно 1 см. Найти длину стороны *AB*.

6. (2) В треугольнике *ABC* высота *BD* равна 11,2, а высота *AE* равна 12. Точка *E* лежит на стороне *BC,* и $BE : EC = 5:9$. Найти длину стороны *AC*.

7. (2) В треугольнике *ABC* длина стороны *AC* равна 3, $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника *ABC* меньше 3.

8. (2) В треугольнике ABC медианы, проведенные к сторонам AC и BC, пересекаются под прямым углом. Длина стороны AC равна b, длина стороны BC равна a. Найти длину стороны AB.

2б. Задачи на равнобедренный и равносторонний треугольники

К задачам на равнобедренный треугольник применимы все вышеизложенные формулы, разве что во всех формулах $b=c$, $\beta=\gamma$.

В случае равностороннего треугольника формулы значительно упрощаются, т.к. $a=b=c$, $\alpha=\beta=\gamma=60^{\circ}$. Тогда $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, длины всех медиан, высот и биссектрис равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1. (1) Один из углов равнобедренного треугольника равен 120°. Найдите отношение сторон треугольника.

Ответ: $1:1:\sqrt{3}$.

2. (1) Найдите площадь круга, описанного около равностороннего треугольника со стороной a.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{3}$.

3. (2) Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, медиана боковой стороны равна 5. Найдите длину боковой стороны.

Ответ: 6.

4. (2) На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде, построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если длина высоты, опущенной на основание треугольника, равна 3 см.

Ответ: $\frac{20}{3}$ см.

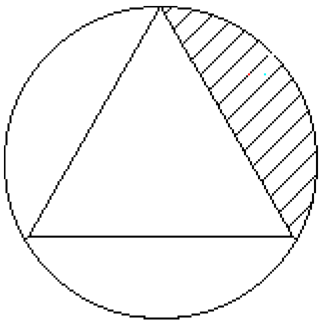
Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 12, а угол при вершине 120^0. Определите высоту треугольника.

2. (1) В равнобедренном треугольнике основание и опущенная на него высота равны 4. Найдите площадь описанного круга.

3. (1) В равнобедренном треугольнике высота равна 8, а основание относится к боковой стороне, как 6:5. Найдите радиус вписанной окружности.

4. (2) Длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, равна 4π. Найдите площадь заштрихованного сектора.



5. (2) Докажите, что сумма расстояний от любой точки равностороннего треугольника до его сторон равна длине высоты треугольника.

2в. Задачи на прямоугольный треугольник

Для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c, помимо общих формул, характерны следующие соотношения: $a^2+b^2=c^2$; $S=\dfrac{ab}{2}$; $r=\dfrac{a+b+c}{2}$; $R=\dfrac{c}{2}$ (центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы); $a=c\sin\alpha=c\cos\beta=btg\alpha=bctg\beta$.

1. (1) В прямоугольном треугольнике ABC, где угол C = 90°, проведена высота CD. Известно, что угол CBA=30°. Найдите $\dfrac{AB}{BD}$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

2. (2) Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а его площадь равна 24 $см^2$. Найдите площадь описанного около треугольника круга.

Ответ: 25π $см^2$.

3. (2) На катете *AC* прямоугольного треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу *AB* в точке *K*. Найти

площадь треугольника *CKB*, если длина катета *AC* равна b и величина угла *ABC* равна β.

Ответ: $\frac{1}{2}b^2\cos^2\beta\, ctg\beta$

4. (2) В треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°. В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

Ответ: $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В прямоугольном равнобедренном треугольнике гипотенуза равна 12 см. Определите высоту треугольника, опущенную из прямого угла.

2. (1) В прямоугольном треугольнике ABC даны: длина катета BC, равная 36, и косинус угла BAC, равный $\frac{8}{17}$. Найдите длину другого катета AC и площадь треугольника.

3. (2) Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Определите углы прямоугольного треугольника.

4. (2) В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

5. (2) В треугольнике *ABC* угол *BAC* прямой, длины сторон *AB* и *BC* равны соответственно 1 и 2. Биссектриса угла *ABC* пересекает сторону *AC* в точке *L*, *G* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*. Что больше, длина *BL* или длина *BG*?

6. (2) На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину α. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

2г. Задачи на трапецию

При решении задач на трапецию нужно помнить следующие положения:

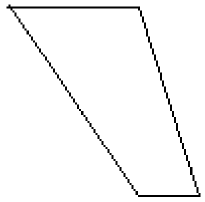
1) $S_{трапеции}=\frac{a+b}{2}h$, где a, b - длины оснований, h - высота трапеции;

2) Если около трапеции ABCD можно описать окружность, то она равнобокая. Если при этом требуется найти радиус этой окружности, то он совпадает с радиусом окружности, описанной около любого из треугольников: ABC, ABD, ACD, BCD.

3) Если в трапецию ABCD вписана окружность, то AB+CD=BC+AD.

4) Трапецию принято изображать так:

(при нижнем основании оба угла - острые), но она может выглядеть и так:



Поэтому, например, задача «Одно из оснований трапеции равно 6, боковые стороны трапеции равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}$. Высота трапеции равна 2. Найдите площадь трапеции» имеет 4 решения: 16, 14, 10 и 8.

1. (1) В равнобокой трапеции ABCD высоты BK и CL отсекают на основании AD отрезки AK и LD. Найдите длины этих отрезков, если AD=19, BC=7.

Ответ: 6; 6.

2. (1) Углы при основании трапеции равны 60° и 45°, высота трапеции равна 6 см. Найдите боковые стороны трапеции.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{2}$ см

3. (2) Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

Ответ: 5; 15.

4. (2) В равнобедренной трапеции даны основания a =21, b =9 и высота h =8. Найдите длину описанной около трапеции окружности.

Ответ: $\frac{85\pi}{4}$.

5. (2) В выпуклом четырёхугольнике MNLQ углы при вершинах N и L – прямые, а величина угла при вершине M равна $arctg\frac{2}{3}$. Найти длину диагонали NQ,если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 м больше длины стороны LN.

Ответ: $2\sqrt{13}$ м.

6. (2) В трапеции *ABCD* отрезки *AB* и *DC* являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке *E*. Найти площадь треугольника *BCE*, если $AB = 30$ см, $DC = 24$ см, $AD = 3$ см и $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $10\sqrt{3}$ см^2.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Найдите площадь равнобокой трапеции, если ее основания равны 12 и 4 см, а боковая сторона образует с одним из оснований угол в 45°.

2. (1) Меньшее основание равнобедренной трапеции равно высоте и равно h. Острый угол трапеции равен 30°. Найдите периметр трапеции.

3. (2) Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины боковых сторон равны 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

4. (2) Основания трапеции равны a и b, боковые стороны равны с. Найдите длину диагонали трапеции.

5. (2) Определите длину высоты трапеции, если её основания равны 28 и 16 см, а боковые стороны равны 25 и 17 см.

6. (2) Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

7. (2) В трапецию ABCD с основаниями AD и BC и с боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, OC=2 и OD=4.

2д. Задачи на параллелограмм

Площадь параллелограмма со сторонами a, b и углом α между ними вычисляется по формуле $S = ab\sin\alpha$. Можно также воспользоваться формулой $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 - длины диагоналей, φ - угол между ними (или $S = ah_a$, где h_a-высота).

Если в параллелограмм можно вписать окружность, то это ромб. Если около параллелограмма можно описать окружность, то это прямоугольник.

1. (1) В параллелограмме сумма двух противолежащих углов равна 132°. Найдите градусную меру каждого из углов параллелограмма.

Ответ: 66º, 114º, 66º, 114º.

2. (1) Одна из диагоналей параллелограмма разбивает его на два равносторонних треугольника со стороной *a*. Найдите длину другой диагонали.

Ответ: $\sqrt{3}\,a$.

3. (2) Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали 3 и 5, а острый угол параллелограмма 60^0.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В параллелограмме с периметром 32 см. проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найдите длины сторон параллелограмма.

2. (1) В параллелограмме ABCD длина диагонали BD, перпендикулярной стороне AB, равна 6. Длина диагонали AC равна $2\sqrt{22}$. Найдите длину стороны AD.

3. (2) Параллелограмм ABCD, у которого AB=153, AD=180, BE=135 (BE – высота), разделен на три одинаковые по площади фигуры прямыми, перпендикулярными AD. На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с AD.

2е. Задачи на ромб

Для ромба характерны все формулы для параллелограмма, только $a = b$.

1. (1) Тупой угол ромба в 5 раз больше его острого угла. Во сколько раз сторона ромба больше радиуса вписанной в него окружности?

Ответ: в 4 раза.

2. (2) Высота ромба равна 12, а одна из его диагоналей равна 15. найдите площадь ромба.

Ответ: 150.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Диагональ ромба равна его стороне, ее длина 10 см. Найдите вторую диагональ и углы ромба.

2. (2) В ромб, сторона которого 20 см, вписан круг. Найти площадь круга, если одна диагональ ромба больше другой в $\frac{4}{3}$ раза.

3. (2) В ромб с острым углом 30^0 вписан круг, площадь которого равна Q. Найдите площадь ромба.

2ж. Задачи на прямоугольник

Для прямоугольника справедливы все формулы для параллелограмма, только угол α между сторонами равен 90°. Поэтому $S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

1. (1) Прямоугольник вписан в окружность радиуса 5 см. Одна из сторон равна 8 см. Найдите другие стороны прямоугольника.

Ответ: 6 см; 8 см; 6 см.

2. (2) Стороны прямоугольника 5 и 4. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на 3 части. Найдите длины этих частей.

Ответ: 1; 3; 1.

3. (2) Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг, найти прямоугольник наибольшей площади. Найдите эту площадь.

Ответ: R^2

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Диагональ прямоугольника делит угол в отношении 2:1. Найдите отношение сторон прямоугольника.

2. (2) Площадь прямоугольника равна $9\sqrt{3}\,см^2$, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120^0. Найдите стороны прямоугольника.

3. (2) Площадь прямоугольника ABCD равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что OB=OD=13. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

2з. Задачи на квадрат

Если a - сторона квадрата, d - его диагональ, то $S = a^2 = \dfrac{d^2}{2}$.

1. (1) Радиус окружности, в которую вписали квадрат, равен 6. Найдите площадь квадрата.

Ответ: 72.

2. (2) Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого $(2\pi - 4)$ см². Найдите периметр квадрата.

Ответ: 16.

3. (2) В плоскости дан квадрат с последовательно расположенными вершинами *A*, *B*, *C*, *D* и точка *O*. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найти длину стороны квадрата и выяснить, где расположена точка O – вне или внутри квадрата.

Ответ: длина стороны квадрата равна 17; точка *O* лежит внутри квадрата.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Сторона квадрата равна 7см. Определите диаметр окружности, описанной около квадрата.

2. (1) В квадрат вписан круг, а в полученный круг вписан квадрат. Найдите отношение площадей квадратов.

3. (2) Квадрат со стороной 3 см срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Найдите сторону восьмиугольника.

4. (2) Дан квадрат ABCD. На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники ABM, BCN, CDK, DAL. Найдите площадь четырёхугольника MNKL, если AB =1.

2и. Задачи на n-угольник (n>3)

Для произвольного выпуклого четырехугольника $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны, а $S = pr$, где p - полупериметр, r - радиус вписанной окружности.

Если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы противоположных углов равны по 180°.

Для правильного n-угольника $S = n\frac{a_n r}{2} = n\frac{R^2 \sin\frac{360^o}{n}}{2}$ (R и r - радиусы описанной и вписанной окружностей, a_n - длина стороны правильного n-угольника)

Полезно также помнить, что в правильном шестиугольнике $a_6 = R$

1. (1) Сторона правильного шестиугольника равна 6. Найдите длину вписанной в него окружности.

Ответ: $6\sqrt{3}\pi$.

2. (2) Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, у которого все углы равны, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°?

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Сторона правильного шестиугольника равна 14. Найдите сторону равновеликого ему правильного треугольника.
2. (2) В правильный треугольник вписана окружность, а в нее – правильный шестиугольник. Найдите отношение площадей треугольника и шестиугольника.
3. (2) Выпуклый четырёхугольник ABCD описан вокруг окружности с центром в точке O, при этом AO = OC = 1, BO = OD = 2. Найти периметр четырёхугольника ABCD.

2к. Задачи на окружность и круг

При решении задач на окружность и круг применяются следующие формулы: $l_{окр} = 2\pi R; S_{круга} = \pi R^2$. $S_{сектора} = \frac{\pi R^2 \alpha^o}{360^o}$ или $\frac{1}{2}R^2\alpha$, если α выражен в радианах. $S_{сегмента} = S_{сектора} - S_{треугольника}$.

Вписанный в окружность угол равен половине центрального ула, опирающегося на ту же дугу.

1. (1) Даны две концентрические окружности. Длина одной из них равна 33π, другой 27π. Найдите ширину кольца.

Ответ: 3.

2. (1) Найдите площадь сектора круга с радиусом R=4 и центральным углом в 30^0.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.

3. (2) Две окружности радиусов R=3 и r=1 касаются внешним образом. Найдите расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

4. (2) В сектор с центральным углом в 60° вписан круг. При каком радиусе сектора площадь круга равна π?

Ответ: 3.

5. (2) Диаметр окружности радиуса R является основанием правильного треугольника. Вычислите площадь той части треугольника, которая лежит вне данного круга.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}R^2$.

6. (2) На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

Ответ: 10 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины 1 принадлежат разным окружностям с радиусами R_1 и R_2. Найдите отношение градусных мер центральных углов, соответствующих этим дугам.

2. (1) Точка лежит вне круга на расстоянии диаметра от центра круга. Найдите угол между касательными, проведенными из данной точки к данному кругу.

3. (2) В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найдите радиус окружностей.

4. (2) В равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна 10 см, а основание 6 см, вписана окружность. Определите расстояние между точками касания, находящимися на боковых сторонах треугольника.

5. (2) Дано круговое кольцо, площадь которого Q. Определите длину хорды большего круга, касательной к меньшему.

6. (2) Круг радиуса $R = \dfrac{6}{\sqrt{4\pi - 3\sqrt{3}}}$ разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного в этот круг правильного треугольника. Определите площадь меньшего из этих сегментов.

7. (2) Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\dfrac{\pi}{6}$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

3. Основные идеи и методы решения планиметрических задач

Если в предыдущем «разделе» мы рассматривали задачи, в которых центральное место принадлежит формулам планиметрии и тригонометрии, то теперь мы перейдем к задачам, где главную роль в решении будут играть не формулы, а теоремы о свойствах и признаках геометрических фигур. Задачи мы разбили уже не по объекту исследования (треугольник, трапеция, круг и т.д.), а по ведущей идее решения.

3а. Задачи на вписанную в треугольник окружность

Если в условии задачи говорится об описанной около треугольника окружности, то в большинстве случаев строить окружность не нужно. Совершенно иная ситуация, когда речь идет о вписанной в треугольник окружности. Здесь не только нужно строить саму окружность, но и проводить радиусы к точкам касания (перпендикуляры к сторонам), а также соединять центр окружности с вершинами треугольника. При этом образуются равные треугольники.

1. (1) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найдите катеты треугольника.

Ответ: 8 см; 15 см.

2. (2) В треугольник вписана окружность с радиусом 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, длины которых 6 и 8. Найдите длины сторон треугольника.

Ответ: 13; 14; 15.

Задачи для самостоятельного решения

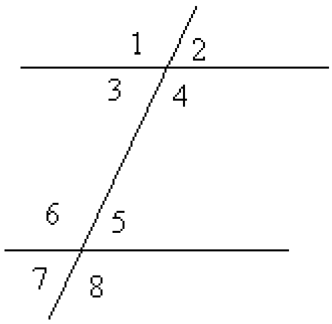
1. (1) Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону на отрезки в 3 и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

2. (2) Около окружности описана равнобокая трапеция, у которой боковая сторона точкой касания делится на отрезки 4 и 9 см. Найдите площадь трапеции.

3. (2) В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

3б. Задачи на свойства параллельных прямых

Ряд задач используют свойства параллельных прямых: при пересечении двух параллельных прямых третьей образуются равные углы.



Квартеты равных углов: $\angle 1 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$.

Особенно часто эти свойства применяются при решении задач на параллелограмм.

1. (1) В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке F. Найдите длину BF, если сторона AB = 11. Ответ: 11.

2. (2) В параллелограмме ABCD сторона AB равна 6 см, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3 см. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что MC=4 см. N – точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислить площадь треугольника BNM.

Ответ: $\frac{27}{8}$ см^2.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В параллелограмме ABCD угол BCD равен 60°, длина стороны AB равна a. Биссектриса угла BCD пересекает сторону AD в точке N. Найдите площадь треугольника NCD.

2. (1) Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол в отношении 1:3. Найдите стороны параллелограмма.

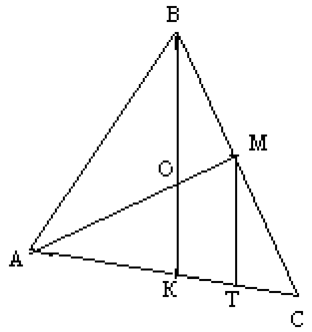
3. (1) В параллелограмме ABCD биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если AB=12 и AF:FD=4:3.

3в. Задачи на пропорциональные отрезки

Теорема Фалеса (а также теоремы Чевы и Менелая) применяются в первую очередь тогда, когда в задаче даны соотношения между отрезками. Очень часто при этом приходится проводить дополнительный отрезок. Идеи использования теоремы Фалеса хорошо видны на следующих примерах.

1. (2) Докажите, что медианы в треугольнике делятся в отношении 2:1, считая от вершины (известная теорема школьного курса математики).

Самый простой путь решения:



Проведем медианы AM и BK, а также отрезок MT, параллельный BK. Имеем: т.к. BM=MC, то KT=TC. Но тогда AK=KC=2KT и, значит, AO:OM=AK:KT=2, что и требовалось доказать.

2. (2) В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M так, что MB=MC, а на стороне AC взята точка K так, что AK=3·KC. Отрезки BK и AM пересекаются в точке O. Найдите $\frac{AO}{OM}$.

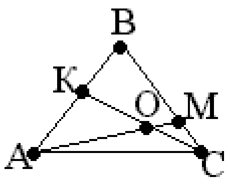
Ответ: 6.

3. (2) В треугольнике *ABC* на стороне *AB* взята точка *K* так, что $AK:BK=1:2$, а на стороне *BC* взята точка *L* так, что $CL:BL=2:1$. Пусть *Q* – точка пересечения прямых *AL* и *CK*. Найти площадь треугольника *ABC*, если дано, что площадь треугольника *BQC* равна 1.

Ответ: $\frac{7}{4}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. (2)

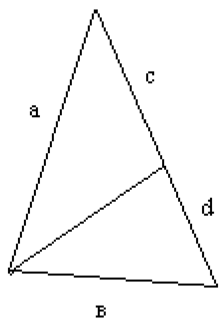


BM:MC=3:1, AK=KB. Найдите: $\frac{S_{AKO}}{S_{ABC}}$

5.3.2 (2) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N, такие, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найти отношения отрезков $\frac{BK}{KN}$ и $\frac{CK}{KM}$.

3г. Задачи на свойства биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника обладает одним замечательным свойством: она делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим боковым сторонам.



$\frac{c}{d}=\frac{a}{в}$ или $\frac{c}{a}=\frac{d}{в}$

Это свойство часто используется в задачах, в которых фигурирует биссектриса треугольника.

1. (1) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите периметр треугольника ABC, если AC = 4; DC = 2; BD = 3.

Ответ: 15.

2. (2) Дан треугольник ABC, в котором $\angle$B=30^0, AB=4, BC=6. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определите площадь треугольника ABD.

Ответ: $\frac{12}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

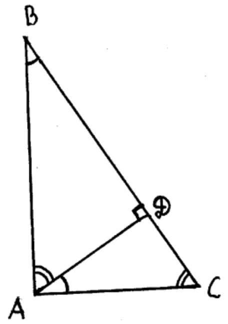
1. (1) В треугольнике ABC, где AB=6, AC=4, биссектриса AL и медиана BM пересекаются в точке O. Найдите $\frac{BO}{OM}$

2. (2) Определите стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из вершины одного угла, делят этот угол на три равные части, а сама медиана равна 10 см.

3д. Задачи на подобие

Два треугольника подобны: по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трем сторонам. Очень важно в задаче увидеть подобные треугольники или другие фигуры. Для этого нужна хорошая практика решения задач.

При решении задач на прямоугольный треугольник полезно знать, что высота, проведенная из прямого угла, делит его на два подобных треугольника:

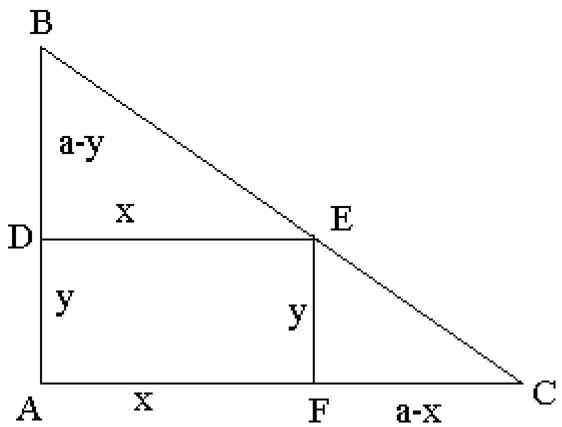


$\Delta ABD \sim \Delta ADC \sim \Delta ABC$.

1. (1) Через точки M и K, принадлежащие сторонам AB и BC треугольника ABC соответственно, проведена прямая MK, параллельная стороне AC. Найдите длину CK, если BC = 12, MK = 8 и AC =18.

Ответ: $\frac{20}{3}$.

2. (1) В прямоугольный равнобедренный треугольник вписан прямоугольник так, что угол прямоугольника совпадает с углом при вершине треугольника, а вершина противолежащего угла лежит на гипотенузе. Докажите, что периметр прямоугольника есть величина постоянная для данного треугольника.



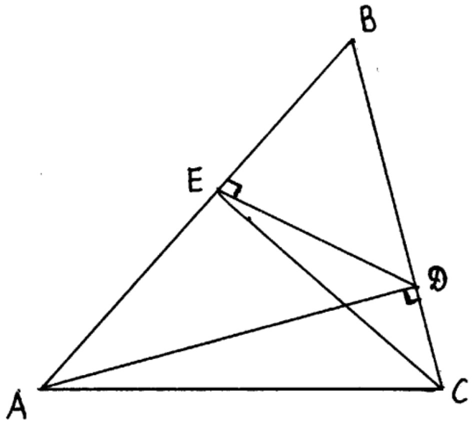
Решение. Пусть AB = AC = a, DE = x; AD = y. Тогда DB=a-y; FC=a-x. Треугольник DEB подобен треугольнику FCE, значит, $\frac{DE}{DB}=\frac{FC}{FE}$;

$\frac{x}{a-y}=\frac{a-x}{y}; xy=a^2-ay-ax+xy; \quad x+y=a; P_{ADEF}=2(x+y)=2a,$ т.е. не зависит от x и y.

3. (1) В прямоугольном треугольнике ABC угол A – прямой. Опущена высота AD, равная $\sqrt{5}$. Найдите произведение $BD \cdot DC$.

Ответ: 5.

4. (2) В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Докажите, что треугольники ABC и DBE подобны. Чему равен коэффициент подобия?



Решение. Из прямоугольного треугольника BCE: BE=BC$\cdot\cos B$. Аналогично из ΔABD: BD=AB$\cdot\cos B$. Значит, две стороны BD и BE треугольника BDE пропорциональны сторонам AB и BC треугольника ABC, а угол B (угол между пропорциональными сторонами) у треугольников общий. ΔBDE~ΔABC по двум сторонам и углу между ними. $k_{подобия}$=cosB (или $\frac{1}{\cos B}$).

Ответ: cosB.

5. (2) В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите сторону треугольника, если радиус малой окружности равен 1.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

6. (2) Из одной точки к окружности проведены две касательные. Длина каждой касательной равна 12 см., а расстояние между точками касания 14,4 см. Определите радиус окружности.

Ответ: 9 см.

7. (2) Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC , если известно, что длина отрезка OC равна 5.

Ответ: $\frac{147}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) В равнобедренный треугольник вписан параллелограмм так, что угол параллелограмма совпадает с углом при вершине треугольника, а вершина противолежащего угла лежит на основании. Докажите, что периметр параллелограмма есть величина постоянная для данного треугольника.

2. (1) Из точки D, лежащей на катете AC прямоугольного треугольника ABC, на гипотенузу CB опущен перпендикуляр DE. Найдите длину CD, если CB=15, AB=9, CE=4.

3. (1) Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найдите катеты треугольников.

4. (1) В параллелограмме ABCD проведена диагональ BD и отрезок AF ($F \in BC$), пересекающий BD в точке O. Известно, что BO = 6, OD = 18, FB = 4. Определите сторону параллелограмма AD.

5. (1) В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен 1. Найдите радиус большей окружности.

6. (2) Найдите длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины – на боковых сторонах.

7. (2) В параллелограмме ABCD точка M – середина стороны CB, N – середина стороны CD. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

8. (2) В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

9. (2) В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C на стороны BC и AB опущены высоты AP и CQ. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3е. Задачи на вписанные и описанные четырехугольники

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

Если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы противоположных углов равны по 180°.

1. (1) Известно, что в трапецию ABCD с основаниями AD и BC можно вписать окружность и около неё можно описать окружность, EF - её средняя линия. Известно, что AB + CD + EF = 18. Найдите периметр трапеции.

Ответ: 24.

2. (2) Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найдите основания трапеции.

Ответ: 9 см; 25 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Четырехугольник ABCD описан около окружности с центром O. Найдите сумму углов AOB и COD.

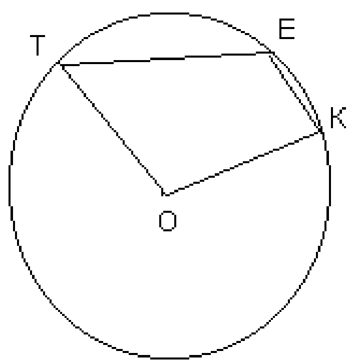
2. (2) Определите площадь круга, вписанного в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

3. (2) Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеции.

3ж. Задачи на вписанные углы

Вписанный в окружность угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

1. (1) Найдите $\angle$TOK, если O – центр окружности и $\angle$TEK=120^0.



Ответ: 120^0.

2. (2) Дан правильный 30-угольник $A_1A_2\ldots A_{30}$ с центром O. Найдите угол между прямыми OA_3 и A_1A_4.

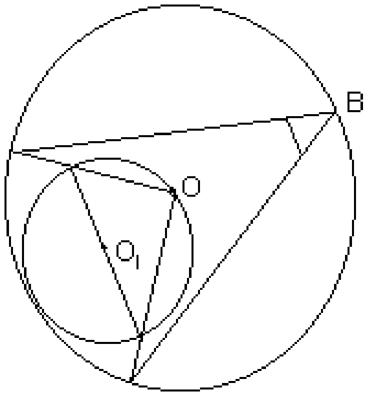
Ответ: $84°$.

3. (2) В окружность вписан четырёхугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM – медиана треугольника CED, и найти её длину, если AD = 8 см, AB = 4 см и $\angle$CDB=α.

Ответ: EM = $2\sqrt{4tg^2a+3}$.

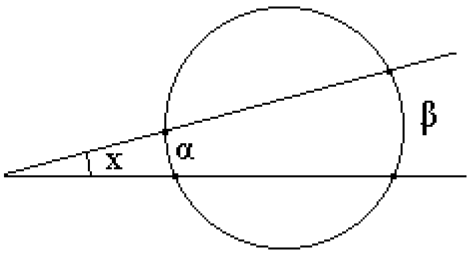
Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Окружности с центрами O и O_1 касаются внутренним образом. Найдите угол B.

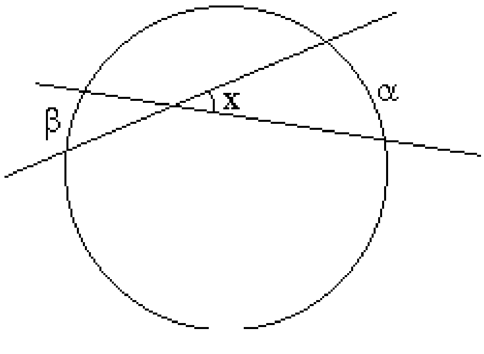


2. (2) Точка находится внутри круга радиуса 6 и делит проходящую через нее хорду на отрезки длиной 5 и 4. Найдите расстояние от точки до окружности.

3. (2) а) Докажите, что $x = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$



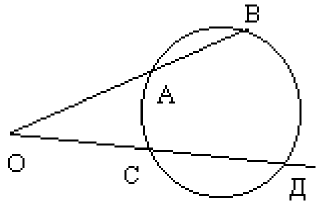
б) Докажите, что $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

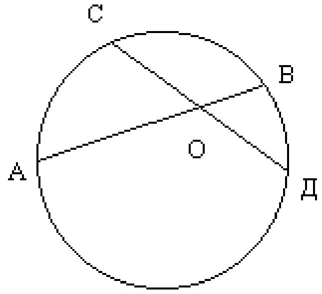


4. (2) Диагональ BD четырехугольника ABCD является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если BD=2, AB=1, $\angle ABD : \angle DBC = 4:3$.

3з. Задачи на пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

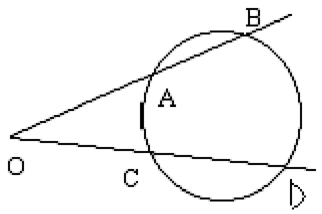
Напомним свойства хорд и секущих.





Для обоих случаев OA·OB = OC·OД.
В частности, если A совпадает с B (OA - касательная), то OA^2=OC·OД

1. (1) Дано:



OA=4, AB=3, CD=2. Найдите OC.

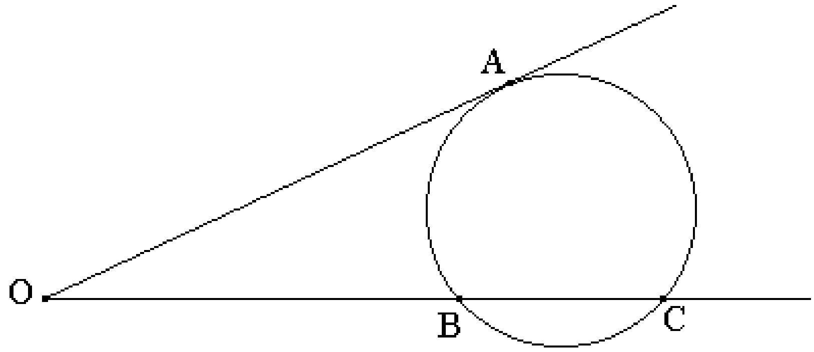
Ответ: $-1+\sqrt{29}$

2 (2) Стороны прямоугольника равны a и b. На стороне a, как на диаметре, построена окружность. На какие отрезки окружность делит диагональ прямоугольника?

Ответ: $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача для самостоятельного решения

1. (1) OA – касательная; OB=4; BC=3. Найдите длину OA.



3и. Задачи на использование дополнительных построений, вспомогательных фигур и геометрических преобразований

Задачи с использованием геометрических преобразований, дополнительных построений и вспомогательных фигур достаточно редки в современных школьных учебниках, но именно в этих задачах, на наш взгляд, проявляется красота геометрии. Это не случайно, ведь благодаря проведенной «лишней» линии, осуществленному повороту, построению симметричной фигуры или вспомогательной окружности даже очень сложная задача может решиться «в одну строчку».

1. (1) Найдите длину окружности, описанной около трапеции, стороны которой равны a, a, a и $2a$.

Ответ: $2\pi a$.

2. (2) Основания трапеции равны 4 см и 9 см, а диагонали равны 5 см и 12 см. Найти площадь трапеции и угол между её диагоналями.

Ответ: 30 см^2, 90°.

3. (2) Основание AB трапеции ABCD вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

Ответ: $\frac{3}{4}ab$.

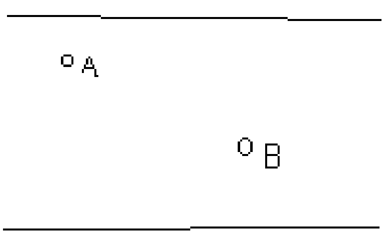
4. (2) Внутри равностороннего треугольника ABC дана точка M, такая, что AM = 1, BM = $\sqrt{3}$ и CM = 2. Найти длину AB.

Ответ: $\sqrt{7}$

Задачи для самостоятельного решения

1. (1) Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

2. (2) Туристы находятся на острове «А». Им надо прибыть на остров «В», при этом сначала побывав на обоих берегах реки. Каков будет их кратчайший маршрут?



3. (2) Средняя линия трапеции равна 4, отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1, углы при основании трапеции равны 40° и 50°. Найдите длины оснований трапеции.

3к. Задачи, решаемые координатным и векторным методами

Вообще говоря, в данном случае речь идет не о частных идеях решения определенного класса задач, а об универсальных методах решения самых разнообразных геометрических проблем.

Суть метода состоит в том, что для решения задач вводится система координат (прямоугольная или аффинная), пишутся необходимые уравнения прямых, других фигур, по известным формулам находятся длины и углы.

1. (1) Даны точки A(-2;1); B(1;5); C(3;-2); D(6;2). Является ли четырехугольник ABCD параллелограммом? Ответ обоснуйте.

Ответ: да.

2. (2) В треугольнике ABC точка M – точка пересечения медиан. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

3. (2) В прямоугольнике ABCD точки M и N- середины сторон AB и BC. Точка O- точка пересечения AN и DM. Найдите $\frac{AO}{ON}$.

Ответ: 2:3.

4. (2) В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке F. Известно, что AF=CF=2, BF=1, DF=4, $\angle$BFC=$\frac{\pi}{3}$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Ответ: $\frac{13}{14}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. (2) Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой и данной точки.

2. (2) Продолжения сторон AD и BC четырёхугольника ABCD пересекаются в точке P. Точки M и N – середины сторон AB и CD. Доказать, что если прямая MN проходит через точку P, то ABCD – трапеция.

3. (2) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором проведены высота CD и перпендикуляр DE к боковой стороне BC. Точка M – середина отрезка DE. Доказать, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

4. (2) Доказать, что для треугольника ABC и любой точки P выполняется неравенство: $PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.